Conjuntos Numéricos y Recta Real

- Mapa Mental Visual -

ERROR FRECUENTE

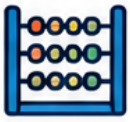
Confundir **decimales periódicos** con números **irracionales**. Un número con cifras decimales infinitas pero periódicas (como 0.333... = $\frac{1}{3}$ o 2.1414... = $2\frac{12}{99}$) ES RACIONAL (Q). Los irracionales (I) NUNCA presentan un patrón o período de repetición (como $\sqrt{3}$ o π).

1 N - Naturales

Se usan principalmente para contar.

Ejemplos: {0, 1, 2, 3, ...}

1 2 3 4 5 ...



Símbolo: **N**

2 Z - Enteros

Incluyen los enteros negativos, el número cero y los enteros positivos.

Ejemplos:

..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...



Símbolo: **ℤ**

3 Q - Racionales

Pueden escribirse como fracción $\frac{a}{b}$ con **a** y $b \in Z$, $b \neq 0$.

Ejemplos:

$\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, 5, 0,25, 0,333...

Símbolo: **ℚ**

4 I - Irracionales

Decimales infinitos **no periódicos** que no provienen de una fracción.

Ejemplos:

$\pi \approx 3.14159$

$e \approx 2.71828$

$\sqrt{2} \approx 1.41421$

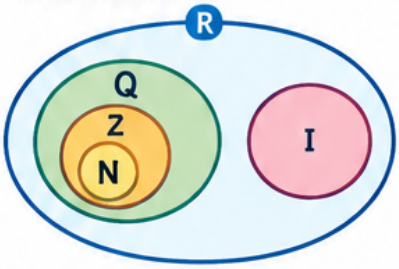


Símbolo: **𝕀**

CONJUNTOS NUMÉRICOS (R)

5 R - Reales

Unión disjunta de racionales e irracionales ($R = Q \cup I$). Cada punto de la recta geométrica le corresponde exactamente un número real.



Símbolo: **ℝ**

Paso 1:
Identificar la forma decimal o fraccionaria

Observa si el número dado contiene decimales terminantes, periódicos o aperiódicos para ubicar su conjunto primario.

Paso 2:
Comprobar la pertenencia por contención

Aplica la jerarquía anidada: $N \subset Z \subset Q \subset R$.
Si un número es Natural, automáticamente es Entero, Racional y Real.

¿El número dado puede escribirse como cociente exacto $\frac{a}{b}$ con a y b enteros?

Sí, la división es exacta o periódica

Pertenece a los **Racionales (Q)**.
Si además no tiene parte fraccionaria y es positivo, pertenece a Naturales **(N)** y Enteros **(Z)**.

No, tiene infinitos decimales sin ningún período

Pertenece a los **Irracionales (I)**.
Junto con Q conforma los Reales (R).

6 Ejemplo Numérico y Recta Numérica

Posicionamiento visual y ejemplos de clasificación exacta sobre el eje de abscisas continuas de los Reales.

Ejemplo resuelto:

- Clasificar −5, 0, $\frac{7}{4}$, $\sqrt{5}$ y 0.666...

Clasificación:

- $-5 \in Z$ y Q
- $0 \in N$, Z y Q
- $\frac{7}{4} = 1.75 \in Q$
- $\sqrt{5} \approx 2.236... \in I$
- $0.666... = \frac{2}{3} \in Q$

Ubicación en la recta:

- −5 (a la izquierda del origen),
- 0 (origen neutro),
- $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{4}$ (entre 0 y 2),
- $\sqrt{5}$ (justo a la derecha de 2).



Mapa Mental: Operaciones Básicas y Propiedades de los Números

1 Operaciones Fundamentales



Las cuatro operaciones aritméticas elementales estructuran el cálculo numérico básico:

- **Adición (+)**: combina sumandos para obtener una suma total (ej. 14 + 28 = 42).
- **Sustracción (-)**: operación inversa que halla la diferencia entre minuendo y sustraendo (ej. 42 - 14 = 28).
- **Multiplicación (×)**: adición iterada que calcula el producto entre factores (ej. 6 × 7 = 42).
- **División (÷)**: reparto equitativo o partición entre dividendo y divisor para obtener cociente y residuo (ej. 42 ÷ 6 = 7).

2 Propiedades de las Operaciones



Leyes algebraicas que rigen el comportamiento de la suma y la multiplicación en los conjuntos numéricos:

- **Propiedad Conmutativa:** el orden de los factores no altera el producto ni la suma ($a + b = b + a$; $a \times b = b \times a$). Ejemplo: $8 + 5 = 5 + 8 = 13$ y $4 \times 9 = 9 \times 4 = 36$.
- **Propiedad Asociativa:** la forma de agrupar los términos no modifica el resultado final ($(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$). Ejemplo: $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$.
- **Propiedad Distributiva:** la multiplicación se distribuye sobre la adición y la sustracción ($a \times (b + c) = a \times b + a \times c$). Ejemplo: $5 \times (10 + 3) = 50 + 15 = 65$.
- **Elementos Neutros:** el cero en la suma ($a + 0 = a$) y el uno en la multiplicación ($a \times 1 = a$).
- **Elementos Inversos:** el inverso aditivo u opuesto ($a + (-a) = 0$) y el inverso multiplicativo o recíproco ($a \times 1/a = 1$, con $a \neq 0$).

OPERACIONES BÁSICAS Y PROPIEDADES

3 Ejemplo Numérico Paso a Paso



Aplicación combinada de propiedades distributiva y asociativa para simplificación de cálculo mental:

1 Paso 1: Identificación y descomposición

Calcular 7×18 aplicando cálculo mental mediante la descomposición aditiva: $7 \times (10 + 8)$.

2 Paso 2: Distribución de factores

Distribuir el multiplicando sobre ambos sumandos: $(7 \times 10) + (7 \times 8)$.

3 Paso 3: Resolución de productos parciales

Multiplicar los términos intermedios: $70 + 56$.

4 Paso 4: Suma asociativa final

Asociar decenas y unidades: $(70 + 50) + 6 = 120 + 6 = 126$.

4 Alerta de Operatoria Matemática



Restricción fundamental en la aritmética real sobre la indeterminación de la división:

ERROR FRECUENTE: División entre cero

La división $a \div 0$ es una operación indefinida (no existe ningún número real k tal que $0 \times k = a$ para $a \neq 0$).

En contraste, $0 \div b = 0$ (para $b \neq 0$).

Nunca simplifiques cancelando factores equivalentes a cero.

Reglas de los Signos y Leyes Operativas

1 Signos en la Suma y Resta

El comportamiento de los signos en la suma y resta depende de si los valores comparten o no el mismo signo:

- **Signos iguales:** Se suman los valores absolutos y se conserva el signo común.

  Ejemplo: (+4) + (+5) = +9; (−3) + (−6) = −9.

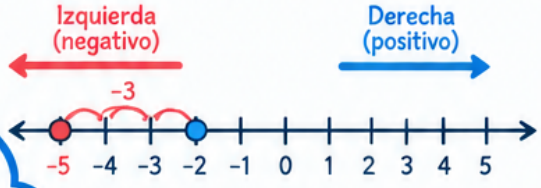
- **Signos diferentes:** Se resta el valor absoluto menor del mayor y se conserva el signo del número con mayor magnitud.

  Ejemplo: (−8) + (+3) = −5; (+7) + (−2) = +5.

2 Recta Numérica y Desplazamientos

La recta orientada permite visualizar las operaciones mediante posiciones y sentidos de movimiento:

- **Punto de partida:** Se inicia en el primer sumando tomando el cero como origen referencial.
- **Sumar positivo (+):** Desplazamiento hacia la derecha (sentido positivo).
- **Sumar negativo (−):** Desplazamiento hacia la izquierda (sentido negativo).
- **Ejemplo visual:** Iniciar en −2 y sumar −3 implica desplazarse 3 unidades hacia la izquierda, finalizando en −5.



3 Regla de Signos: Multiplicación y División

Leyes estrictas para producto y cociente de números enteros y racionales:

(+) · (+) = (+)	(+) ÷ (+) = (+)
(−) · (−) = (+)	(−) ÷ (−) = (+)
(+) · (−) = (−)	(+) ÷ (−) = (−)
(−) · (+) = (−)	(−) ÷ (+) = (−)

- **Regla nemotécnica:** Signos iguales dan positivo (+); signos diferentes dan negativo (−).

4 Supresión de Dobles Signos y Paréntesis

Simplificación de expresiones con paréntesis adyacentes antes de operar:

- + (+a) = +a
- − (−a) = +a (el opuesto de un negativo es positivo)
- + (−a) = −a
- − (+a) = −a

- **Ejemplo resuelto:**

  7 − (−4) + (−2) = 7 + 4 − 2 = 9.

5 Error Frecuente: Suma Algebraica vs Multiplicación

Confusión habitual entre las reglas operativas de adición y multiplicación:

- **Error común:** Aplicar 'menos por menos es más' en una suma: escribir incorrectamente −3 − 5 = +8.
- **Corrección:** En −3 − 5 no hay producto. Son dos cantidades negativas acumuladas: −3 − 5 = −8.
- **Distinción clave:** El producto requiere signo explícito de multiplicación o yuxtaposición con paréntesis: (−3) · (−5) = +15.

ERROR FRECUENTE

¡Cuidado! 'Menos por menos da más' solo es válido en multiplicación y división, nunca al sumar o restar deudas: −4 − 6 = −10, no +10.

Jerarquía de Operaciones: PEMDAS / GEMDAS

1 Nivel 1: Agrupación (G / P)

( ) [ ] { }

Resolver de adentro hacia afuera: paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { } y barras de fracción o radicales que agrupen términos.

2 Nivel 2: Exponentes y Radicales (E)

x^y $\sqrt{\ }$

Calcular todas las potencias y raíces presentes en la expresión antes de cualquier multiplicación o división.

JERARQUÍA DE OPERACIONES: PEMDAS / GEMDAS

3 Nivel 3: Multiplicación y División (MD)

× ÷

Poseen idéntica prioridad. Se ejecutan secuencialmente de izquierda a derecha conforme aparecen en la línea de cálculo.

4 Nivel 4: Suma y Resta (AS)

\+ −

Poseen idéntica prioridad final. Se resuelven de izquierda a derecha tras haber agotado las operaciones de niveles superiores.

Ejercicio Combinado Resuelto Paso a Paso

Resolución analítica de la expresión modelo: $18 - 2 \cdot [\, 3 + (5 - 2)^2 \,] \div 6 + 4$

Paso 1: Paréntesis interno	Evaluamos el grupo más profundo: $(5 - 2) = 3$. La expresión queda: $18 - 2 \cdot [\, 3 + 3^2 \,] \div 6 + 4$
Paso 2: Potencia dentro del corchete	Calculamos la potencia: $3^2 = 9$. La expresión queda: $18 - 2 \cdot [\, 3 + 9 \,] \div 6 + 4$
Paso 3: Reducción del corchete	Efectuamos la suma interna: $[\, 3 + 9 \,] = 12$. La expresión queda: $18 - 2 \cdot 12 \div 6 + 4$
Paso 4: Multiplicación y división (de izquierda a derecha)	Primero la multiplicación: $2 \cdot 12 = 24$. Luego la división consecutiva: $24 \div 6 = 4$. La expresión queda: $18 - 4 + 4$
Paso 5: Suma y resta final (de izquierda a derecha)	Efectuamos de izquierda a derecha: $18 - 4 = 14$; finalmente $14 + 4 = 18$. **Resultado definitivo: 18**

ERROR FRECUENTE

Calcular sumas o restas antes de productos o cocientes por simple proximidad visual (por ejemplo, resolver $10 - 3 \cdot 2$ como $(10 - 3) \cdot 2 = 14$ en lugar del orden correcto $10 - 6 = 4$), o asumir erróneamente que la multiplicación siempre precede a la división sin respetar la regla de izquierda a derecha (por ejemplo, en $12 \div 3 \cdot 2$ el resultado correcto es $4 \cdot 2 = 8$, nunca $12 \div 6 = 2$).

Criterio de Desempate Operativo

Guía de decisión ante la presencia simultánea de multiplicaciones y divisiones contiguas sin signos de agrupación mediadores.

¿Qué operación debe resolverse primero en expresiones del tipo $a \div b \cdot c$ o $a \cdot b \div c$?

La división antecede espacialmente a la multiplicación (ej. $20 \div 4 \cdot 2$)	Se efectúa primero la división ($20 \div 4 = 5$) y luego se multiplica el cociente obtenido por el factor siguiente ($5 \cdot 2 = 10$).
La multiplicación antecede espacialmente a la división (ej. $6 \cdot 4 \div 8$)	Se efectúa primero el producto ($6 \cdot 4 = 24$) y posteriormente se divide entre el divisor siguiente ($24 \div 8 = 3$).

Múltiplos, Divisores, Números Primos y Compuestos

1 Múltiplos y Divisores: Fundamentos

Relaciones numéricas fundamentales en los enteros positivos:

- **Múltiplo:** Número que resulta de multiplicar dicho entero por cualquier número natural ($a = b \cdot k$).
  Ejemplo: Múltiplos de 4 = {4, 8, 12, 16, 20...}.
- **Divisor:** Número contenido exactamente en otro un número entero de veces (resto igual a cero).
  Ejemplo: Divisores de 12 = {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

2 Criterios de Divisibilidad Rápidos

Reglas prácticas para verificar divisibilidad sin efectuar la división completa:

- **Por 2:** La última cifra es par (0, 2, 4, 6, 8). Ejemplo: 248 es divisible por 2.
- **Por 3:** La suma de sus cifras da múltiplo de 3. Ejemplo: 531 → 5+3+1 = 9 (múltiplo de 3).
- **Por 5:** Su última cifra termina exactamente en 0 o en 5. Ejemplo: 475.
- **Por 7:** La diferencia entre el número sin la última cifra y el doble de la última cifra es 0 o múltiplo de 7. Ejemplo: 343 → 34 - (3·2) = 28 (múltiplo de 7).
- **Por 11:** La diferencia entre la suma de cifras de posición impar y la suma de cifras de posición par es 0 o múltiplo de 11. Ejemplo: 121 → (1+1) - 2 = 0.

MÚLTIPLOS, DIVISORES Y NÚMEROS PRIMOS

3 Clasificación: Primos, Compuestos y Criba

Categorización de enteros mayores que 1 según su número de divisores:

- **Número Primo:** Posee únicamente dos divisores distintos: el 1 y él mismo.
  Ejemplo: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...
- **Número Compuesto:** Posee más de dos divisores. Ejemplo: 4 (1, 2, 4), 6 (1, 2, 3, 6), 9 (1, 3, 9).
- **Criba de Eratóstenes:** Algoritmo para listar primos hasta N. Se escriben los números del 2 a N y se tachan sucesivamente los múltiplos de 2, de 3, de 5 y de los siguientes primos.

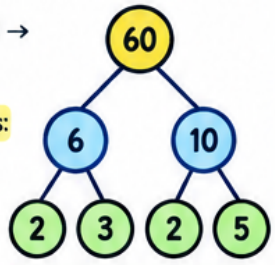
2	3	~~4~~	5	~~6~~
7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11
~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~
~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~

○ = primo
✕ = tachado (múltiplo)

4 Descomposición Factorial en Factores Primos

Todo entero compuesto mayor que 1 se descompone de forma única como producto de factores primos (Teorema Fundamental de la Aritmética):

- **Método de árbol:** $60 \to 6 \cdot 10 \to (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.
- **Método de divisiones sucesivas:** $60 \div 2 = 30$; $30 \div 2 = 15$; $15 \div 3 = 5$; $5 \div 5 = 1$.
  Resultado canónico: $2^2 \cdot 3 \cdot 5$.



$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

¡ERROR FRECUENTE!

El 1 y el 0 NO son números primos.

MCD y MCM: Cálculo y Aplicaciones

1 Núcleo Central: MCD y MCM

El **Máximo Común Divisor** (MCD) y el **Mínimo Común Múltiplo** (MCM) son dos herramientas fundamentales de la teoría de números que permiten resolver problemas de partición exacta y de coincidencia periódica respectivamente.

- **MCD:** El mayor divisor entero positivo común a dos o más números naturales.
- **MCM:** El menor múltiplo estrictamente positivo común a dos a más números naturales.

Relación fundamental para dos enteros positivos a y b:

$$MCD(a, b) \cdot MCM(a, b) = a \cdot b$$

2 Bamas de Cálculo: Descomposición Simultánea

La descomposición simultánea en factores primos organiza los números en paralelo y extraa factores comunes y no comunes de forma sistemática.

- **Para el MCD:** Se extreen únicamente los factores primos que dividen simultántamente a todos los números. Al no haber más divisores comunes, se multiplican dichos factores comunes.
- **Para el MCM:** Se extraen todos los factores primos posibles hasta reducir cada número individual a 1. Se multiplican todos los factores primos extraídos.

Ejemplo base con 24 y 36:
Factores primos de 24 = $2^3 \cdot 3$; de 36 = $2^2 \cdot 3^2$.
MCD(24, 36) = $2^2 \cdot 3 = 12$.
MCM(24, 36) = $2^3 \cdot 3^2 = 72$.

3 Algoritmo de Euclides para el MCD

Procedimiento eficiente mediante divisiones sucesivas, ideal cuando los números son grandes y la factorización resulta laboriosa.

- **Paso 1:** Dividir el número mayor a entre el menor b para obtener cociente q_1 y residuo r_1 ($a = b \cdot q_1 + r_1$).
- **Paso 2:** Si el residuo r_1 es 0, el MCD es b. Si no, se divide b entre r_1 obteniendo residuo r_2.
- **Paso 3:** Se repite el proceso sucesivamente hasta obtener un residuo igual a 0. El último residuo no nulo es el MCD.

Ejemplo: 168 y 48

1. **Paso 1:** División inicial
   Dividir 168 entre 48: $168 = 48 \cdot 3 + 24$ (residuo 24).
2. **Paso 2: División sucesiva**
   Dividir el divisor previo entre el residuo: $48 = 24 \cdot 2 + 0$ (residuo 0).
3. **Paso 3: Conclusión**
   El último residuo no nulo es 24, por lo tanto MCD(168, 48) = 24.

MCD(168, 48) = 24

4 Aplicaciones Prácticas: ¿Cuándo usar cada uno?

Guía de decisión rápida para identificar qué operador resuelve situaciones contextualizadas en problemas reales.

- **Usar MCD:** Repartir objetos en grupos de igual tamaño sin que sobre nada, cortar varillas/cuerdas en partes iguales de longitud máxima posible, baldosas cuadradas más grandes para cubrir un piso.
- **Usar MCM:** Problemas de ciclos y sincronización periódica (cuándo volverán a coincidir campanas, semáforos, rutas de autobuses o corredores en pista).

¿Qué tipo de situación plantea el problema?



Reparto en partes iguales de tamaño máximo sin sobrantes

Calcular el **Máximo** Común Divisor (MCD).
Ejemplo: Repartir 24 manzanas y 36 peras en cajas idénticas máximas → MCD(24, 36) = 12 cajas con 2 manzanas y 3 peras cada una.



Coincidencia periódica o sincronización futura

Calcular el **Mínimo Común Múltiplo** (MCM).
Ejemplo: Tres rutas de bus salen cada 15, 20 y 30 min → MCM(15, 20, 30) = 60 min; coincidirán de nuevo exactamente tras 1 hora.

5 Alerta: Errores Frecuentes

Confusiones comunes al seleccionar factores o interpretar enunciados.

- **Confundir exponentes en factores primos:** Para el MCD se toman solo factores COMUNES al MENOR exponente. Para el MCM se toman factores COMUNES Y NO COMUNES al MAYOR exponente.
- Olvidar que el MCD nunca puede ser mayor que el menor de los números, y el MCM nunca puede ser menor que el mayor de los números.

ERROR FRECUENTE

Incluir factores no comunes al calcular el MCD o detener la descomposición del MCM antes de que todas las columnas lleguen a 1.

Verificar siempre:

$MCD(a, b) \leq \min(a, b) \leq \max(a, b) \leq MCM(a, b)$.

Fracciones: Concepto, Tipos y Representación

1 ¿Qué es una Fracción y sus Elementos?

Una fracción representa el cociente exacto entre dos números enteros a/b (donde el denominador b nunca puede ser 0), indicando la partición equitativa de una unidad o conjunto.

$$\frac{a}{b}$$

- **Numerador** (número superior) (partes tomadas)
- **Denominador** (número inferior) (partes totales)

- **Numerador (número superior):** indica la cantidad de partes congruentes que se toman o consideran de la unidad dividida.
- **Denominador (número inferior):** indica el número total de partes iguales en las que se ha fraccionado el entero de referencia.
- **Línea de fracción o barra horizontal:** representa formalmente la operación matemática de división o reparto equitativo.

2 Clasificación Fundamental de Fracciones

Las fracciones se clasifican de acuerdo con la relación de magnitud entre el numerador y el denominador respecto al entero de referencia:

Fracción Unitaria

El numerador es igual a 1 (ejemplo: $1/2$, $1/5$). Representa una sola partición elemental del entero.

Fracción Propia

El numerador es estrictamente menor que el denominador ($a < b$). Su valor numérico es siempre menor a 1 (ejemplo: $\frac{3}{4} = 0.75$).

Fracción Aparente o Entera

El numerador es múltiplo exacto del denominador ($\frac{b}{b} = k$). Representa unidades enteras completas (ejemplo: $\frac{6}{2} = 3$).

Fracción Impropia

El numerador es estrictamente mayor que el denominador ($a > b$). Su valor numérico es mayor que 1 entero (ejemplo: $\frac{7}{4} = 1.75$).

FRACCIONES: CONCEPTO, TIPOS Y REPRESENTACIÓN

3 Conversión de Fracción Impropia a Número Mixto

Una fracción impropia siempre puede reescribirse como un número mixto compuesto por una parte entera y una fracción propia remanente.

1. **Paso 1:** Dividir el numerador entre el denominador mediante división entera.
2. **Paso 2:** El cociente entero obtenido pasa a ser el número grande entero del número mixto.
3. **Paso 3:** El residuo de la división se convierte en el nuevo numerador, conservando exaatamente el mismo denominador.

Ejemplo resuelto:

Para convertir $\frac{7}{4}$ a mixto: dividimos 7 entre 4, dando cociente 1 y residuo 3. Por lo tanto, $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ (un entero y tres cuartos).

$$\begin{array}{r|l} 7 \div 4 & \\ 4\overline{)\,7} & \text{cociente: } 1 \\ -\,4 & \text{residuo: } 3 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Dividir
Efectuar la división entera: Dividendo = Numerador, Divisor = Denominador.

→

Identificar
El cociente de la división corresponde a las unidades enteras completas alcanzadas.

→

Ensamblar
El residuo forma el numerador de la parte fraccionaria y el divisor original se mantiene en el denominador.

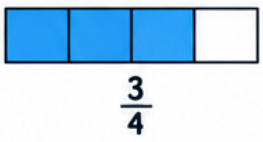
4 Representación Geométrica y Recta Numérica

Para visualizar una fracción de manera gráfica y espacial se emplean principalmente dos modelos geométricos y la ubicación lineal:

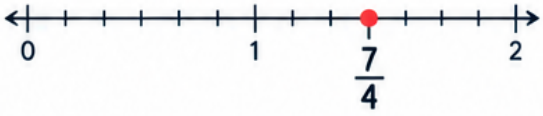
- **Sectores circulares (diagrama de pastel):** se dibuja un círculo dividido en 'b' sectores idénticos y se sombrean 'a' sectores.
- **Barras rectangulares (regletas de área):** barra segmentada en casillas de igual longitud. Facilita observar que una fracción impropia requiere dibujar más de una barra completa.
- **Recta numérica:** el intervalo entre 0 y 1 se particiona en 'b' segmentos idénticos. Si es impropia, la posición supera el punto 1 avanzando hacia los enteros siguientes.



$\frac{3}{4}$



$\frac{3}{4}$



$\frac{7}{4}$

¡ERROR FRECUENTE!

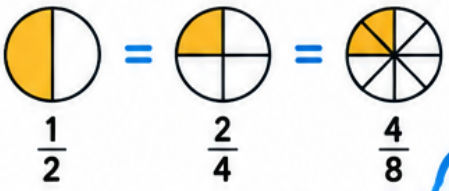
Pensar que una fracción nunca puede ser mayor que 1. Recuerda: en una fracción impropia (ej. $7/4$) el numerador supera al denominador; por tanto, representa más de un entero completo y requiere dos o más figuras geométricas para dibujarse.

Fracciones Equivalentes y Simplificación

1 Concepto de Equivalencia

Dos fracciones son equivalentes cuando representan exactamente la misma porción de la unidad o el mismo valor numérico, aunque sus numeradores y denominadores sean diferentes.

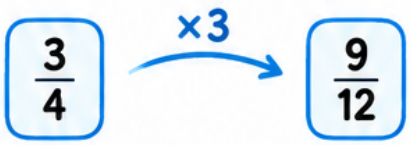
- **Propiedad fundamental:** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$ (productos cruzados iguales).
- Representación visual: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$ ocupan la misma superficie coloreada en figuras idénticas.



2 Amplificación de Fracciones

Consiste en multiplicar simultáneamente el numerador y el denominador por el mismo número natural distinto de cero. Se utiliza para homogeneizar denominadores en operaciones de suma y resta.

- **Fórmula:** $\frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ con $k > 1$.
- **Ejemplo:** $\frac{3}{4}$ amplificado por 3 da como resultado $\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$.



FRACCIONES EQUIVALENTES Y SIMPLIFICACIÓN

3 Simplificación mediante el MCD

Consiste en dividir el numerador y el denominador entre un divisor común exacto. El método directo más eficiente emplea el Máximo Común Divisor (MCD) de ambos términos para llegar de forma inmediata a la fracción irreducible.

- **Ejemplo resuelto:** Para simplificar 24/36, calculamos MCD(24, 36) = 12.
- **División:** $(24 \div 12)\ (36 \div 12) = \frac{2}{3}$.

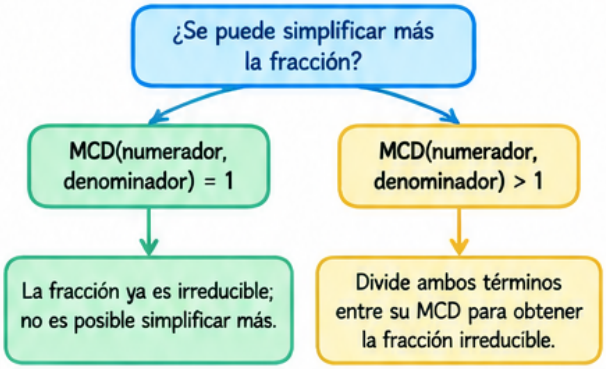
Pasos:

1. **Paso 1: Identificar divisores o MCD**
   Calcula el MCD entre el numerador y el denominador (o descompón ambos números en factores primos).
2. **Paso 2: Dividir ambos términos**
   Divide numerador y denominador entre el factor común encontrado.
3. **Paso 3: Comprobar irreducibilidad**
   Verifica que numerador y denominador sean coprimos (MCD = 1).

4 Criterio de Fracción Irreducible

Una fracción a/b es irreducible cuando su numerador y su denominador son números primos entre sí (coprimos), es decir, su único divisor positivo común es 1.

- No admite ninguna simplificación adicional.
- Toda fracción propia o impropia posee una forma irreducible única.



ERROR FRECUENTE

¡No simplifiques **términos sumados** o restados!
Solo se cancelan factores multiplicativos comunes.

Ejemplo incorrecto: $\frac{4+5)}{4} \neq 5$.

Ejemplo correcto: $\frac{4 \cdot 5}{4} = 5$.

Suma y Resta de Fracciones — Mapa Mental Visual

1 Mismo Denominador

Cuando las fracciones comparten exactamente el mismo número en el denominador, el procedimiento aritmético es directo: la base se conserva intacta y se operan exclusivamente los numeradores.

- **Regla de suma:** $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$
- **Regla de resta:** $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$
- Ejemplo inmediato: $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$
- Ejemplo con resta: $\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ (simplificada)

Regla Fundamental

El denominador representa en cuántas partes iguales está dividido el todo; nunca se suman ni se restan las partes base entre sí.

2 Distinto Denominador mediante Mínimo Común Múltiplo (MCM)

Para operar fracciones heterogéneas con cualquier cantidad de términos, convertimos todas las expresiones a un común denominador usando el MCM de los denominadores originales.

- **Paso 1:** Extraer el MCM de los denominadores para fijar el común denominador.
- **Paso 2:** Para cada fracción, dividir el nuevo común denominador entre su denominador original y multiplicar el resultado por el numerador.
- **Paso 3:** Sumar o restar los numeradores transformados y simplificar el resultado a su mínima expresión.

Ejemplo: $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

1. Identificar denominadores	2. Calcular el MCM	3. Transformar numeradores	4. Operar y simplificar
En la operación $\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$ se obtienen los denominadores 6 y 4.	MCM(6, 4) = 12. Este valor será el denominador común unificado.	Para $\frac{5}{6}$: $(12 \div 6) \times 5 = 2 \times 5 = 10$. Para $\frac{1}{4}$: $(12 \div 4) \times 1 = 3 \times 1 = 3$.	$\frac{(10-3)}{12} = \frac{7}{12}$ (fracción irreducible).

¿Cuántos términos fraccionarios necesitas sumar o restar?

- **Exactamente dos términos** → Aplica el método cruzado o mariposa: $(a \cdot d \pm b \cdot c) / (b \cdot d)$ para cálculo mental rápido.
- **Tres o más términos** → Halla el MCM de todos los denominadores simultáneamente para unificar en un solo paso.

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

3 Método Mariposa / Productos Cruzados (Para 2 Términos)

Atajo visual para calcular la suma o resta de dos fracciones heterogéneas de forma directa sin factorizar previamente.

- **Ala izquierda:** Multiplica el numerador izquierdo por el denominador derecho (a × d).
- **Ala derecha:** Multiplica el denominador izquierdo por el numerador derecho (b × c).
- **Cuerpo inferior:** Multiplica ambos denominadores entre sí (b × d).
- **Fórmula general:** $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$

Ejemplo resuelto:

$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$



4 Problema Contextualizado y Alerta Crítica

Aplicación a un caso práctico de distribución de recursos y prevención del error operativo más habitual.

- **Problema:** En una jornada escolar, se dedican $\frac{1}{4}$ del tiempo a lectura reflexiva y $\frac{25}{25}$ a resolución de ejercicios. ¿Qué fracción de la jornada se ha completado?
- **Planteamiento:** $\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ con MCM(4, 5) = 20.
- **Cálculo:** $\frac{(1 \times 5)}{20} + \frac{(2 \times 4)}{20} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}$ de la jornada.
- **Respuesta:** Se ha completado $\frac{12}{20}$ del total; resta por asignar $\frac{72}{20}$.

ERROR FRECUENTE: ¡NO SUMAR DENOMINADORES DIRECTAMENTE!

Ejemplo erróneo: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \neq \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$.

El cálculo correcto es $\frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$.

¡Las fracciones se suman y se restan con método!

Mapa Mental: Multiplicación y División de Fracciones

Multiplicación y División de Fracciones

1 Multiplicación Directa

La multiplicación de fracciones se efectúa en línea horizontal recta. Se multiplican los numeradores entre sí para obtener el numerador resultante, y los denominadores entre sí para obtener el denominador final:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- Fórmula general: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- Ejemplo resuelto: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$
- No requiere obtener común denominador ni calcular MCM.

2 Simplificación Previa (Cruzada o Vertical)

Antes de multiplicar números grandes, cancéla factores comunes dividendo cualquier numerador con cualquier denominador. Esto reduce las cifras y ahorra simplificaciones complejas al final.

Ejemplo paso a paso: $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$

1. Simplificar 4 y 8 dividiendo entre 4 → quedan 1 y 2.
2. Simplificar 3 y 9 dividiendo entre 3 → quedan 1 y 3.
3. Cálculo reducido inmediato:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Ahorro de Tiempo
Simplificar antes de operar evita manejar cantidades enormes y disminuye drásticamente los errores aritméticos.

3 División: Fracción Reciproca e Inversa

Dividir entre una fracción equivale a multiplicar por su recíproca (fracción invertida). Se mantiene la primera fracción idéntica, se cambia el signo de división por multiplicación y se invierten el numerador y denominador de la segunda fracción:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

- Fórmula:
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$
- Ejemplo guiado:
$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$$
- Conversión a número mixto:
$$\frac{21}{10} = 2 \text{ enteros y } \frac{1}{10}$$

4 División: Producto Cruzado y Ley del Sándwich

Existen dos esquemas visuales equivalentes para calcular divisiones rápidamente sin escribir la fracción invertida de forma explicita.

- **Método de Producto Cruzado:**
  Numerador 1 × Denominador 2 va arriba;
  Denominador 1 × Numerador 2 va abajo.
- **Ley del Sándwich / Oreja:** Fracción sobre fracción $(\frac{a}{b}) / (\frac{c}{d})$.
  Los extremos se multiplican para el numerador exterior $(a \cdot d)$ y los medios para el denominador interior $(b \cdot c)$.
- **Ejemplo de Torre:**

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 5} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$



1. **Extremos arriba**
   Multiplica el numerador superior por el denominador inferior $(3 \cdot 8 = 24)$.
2. **Medios abajo**
   Multiplica los dos términos intermedios $(4 \cdot 5 = 20)$.
3. **Simplificación**
   Divide ambos términos entre su factor común 4 para llegar a 6/5.

5 Alerta: Errores Frecuentes

Identifica y previene las confusiones habituales que ocurren al combinar operaciones de fracciones.

- **¡Cuidado con el común denominador!:**
  Jamás busques mínimo común múltiplo para multiplicar o dividir; eso solo se hace en sumas y restas.
- **Inversión incorrecta:**
  En la división solo se invierte la segunda fracción (el divisor), nunca la primera ni ambas.
- **Cancelación no permitida:**
  Solo se pueden tachar factores en productos, nunca términos en sumas o restas.

ERROR FRECUENTE

No apliques producto cruzado en la multiplicación. La multiplicación SIEMPRE es recta horizontal. Cruzar al multiplicar arruina la operación.

Mapa Mental: Números Decimales, Clasificación y Valor Posicional

NÚMEROS DECIMALES: Clasificación y Valor Posicional

1 Estructura y Valor Posicional de los Decimales

Un número decimal consta de una parte entera a la izquierda del punto o coma decimal y una parte decimal a la derecha, donde cada posición disminuye en potencias de diez.

- Parte entera: Centenas (100), Decenas (10), Unidades (1).
- Punto o coma decimal: Separa el orden de las unidades enteras de las fracciones decimales.
- Décimas (0,1 o $^1/_{10}$): Primer lugar a la derecha del punto.
- Centésimas (0,01 o $^1/_{100}$): Segundo lugar decimal.
- Milésimas (0,001 o $^1/_{1000}$): Tercer lugar decimal.

¡Atención al alinear el punto!
En sumas, restas y comparaciones posicionales, alinear siempre la coma o punto decimal garantiza no sumar erróneamente décimas con centésimas.

2 Clasificación de los Números Decimales

Los decimales se organizan según la repetición y finitud de sus cifras decimales en tres categorías principales:

Decimal Exacto (Finito):
Posee un número limitado de cifras decimales tras dividirse de forma exacta.
Ejemplos: 0,75; 2,5.

Periódico Puro:
Su período (cifra o grupo de cifras que se repite al infinito) comienza inmediatamente después del punto.
Ejemplos: 0,333... = 0,(3); 1,4545... = 1,(45).

Periódico Mixto:
Posee una parte no periódica (anteperíodo) inmediatamente tras el punto, seguida del período que se repite infinitamente.
Ejemplo: 0,1666... = 0,1(6).

¿Cómo clasificar rápidamente cualquier número decimal?

1. ¿Las cifras decimales tienen un fin? → Es un Decimal Exacto (ejemplo: 3/4 = 0,75).
2. ¿Las cifras se repiten de inmedato después del punto? → Es un Periódico Puro (ejemplo: $^1/_3$ = 0,333...).
3. ¿Hay cifras fijas antes del grupo periódico que se repite? → Es un Periódico Mixto (ejemplo: $^7/_9$ = 1,1666...)

3 Ejemplo Resuelto

Descomposición posicional de 45,628:

$$45{,}628 = 4 \times 10 + 5 \times 1 + 6 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}01 + 8 \times 0{,}001$$

1. Identificamos la parte entera: 45 (decenas y unidades).
2. Identificamos las décimas: 6 décimas = 0,6.
3. Identificamos las centésimas: 2 centésimas = 0,02.
4. Identificamos las milésimas: 8 milésimas = 0,008.

45,628 = 40 + 5 + 0,6 + 0,02 + 0,008

4 Ejemplos Numéricos Resueltos y Alerta de Errores

Análisis desglosado de números decimales de uso frecuente y prevención de fallos usuales en cálculos escolares.

- Descomposición posicional de 45,628:
  4 Decenas (40) + 5 Unidades (5) + 6 Décimas (0,6) + 2 Centésimas (0,02) + 8 Milésimas (0,008).
- Notación abreviada de período:
  En 0,8333... el anteperíodo es 8 y el período es 3, anotándose 0,8(3) o con barra horizontal sobre el 3.

ERROR FRECUENTE
Asumir que 0,75 es mayor que 0,8 porque 75 parece más grande que 8. Al comparar por valor posicional, 0,8 equivale a 0,80 (8 décimas), superando a 0,75 (7 décimas).

5 Comparar Decimales

Usamos los símbolos: > < =

Ejemplos:

- 0,8 > 0,75
- 0,25 < 0,3
- 1,2 = 1,20

6 Recta Numérica

Los decimales se ubican en la recta numérica entre dos enteros.



Ejemplos:

- 0,3 está entre 0 y 1.
- 0,75 está entre 0,6 y 0,8.

7 Ordenar Decimales

Para ordenar números decimales se comparan sus cifras de izquierda a derecha.

Ejemplos:

- De menor a mayor:
  0,3 < 0,25 < 0,5 < 0,8
- De mayor a menor:
  2,5 > 2,05 > 1,9 > 0,7

Si tienen la misma parte entera, compara las décimas, centésimas, etc.

8 Valor Absoluto

El valor absoluto es la distancia de un número a cero en la recta numérica.

Símbolo: | a |

Ejemplos:

- |5| = 5
- |-5| = 5

Ejemplo práctico:
Temperatura por la mañana: -3 °C
Temperatura por la tarde: 4 °C
Cambio de temperatura:
4 - (-3) = 7
Aumento: 7 °C

Conversión entre Fracciones y Decimales — Mapa Mental

1 De Fracción a Decimal (División Directa)

Toda fracción a/b representa la división del numerador entre el denominador (a ÷ b).
Al dividir, se añade una coma decimal y ceros sucesivos al residuo.

- **Decimal Exacto:** el residuo llega a 0 (ejemplo: 3/4 = 3 ÷ 4 = 0,75).
- **Decimal Periódico Puro:** las cifras decimales se repiten indefinidamente desde la coma (ejemplo: 1/3 = 0,333... = $0,\overline{3}$).
- **Decimal Periódico Mixto:** contiene una parte no periódica (anteperíodo) seguida del período (ejemplo: 5/6 = 0,8333... = $0,8\overline{3}$).

1. **Paso 1: Configurar la división**
   Escribe el numerador dentro de la galera y el denominador fuera: a ÷ b.
2. **Paso 2: Colocar la coma y añadir ceros**
   Si el numerador es menor que el denominador, coloca '0,' en da cociente y añade un cero al dividendo para continuar dividiendo hasta hallar el patrón.

2 De Decimal Exacto a Fracción Generatriz

Para convertir un número decimal con cifras finitas a fracción irreductible:

- **Numerador:** se escribe el número completo sin coma decimal.
- **Denominador:** se escribe la unidad (1) seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.
- **Simplificación obligatoria:** dividir numerador y denominador entre su MCD hasta obtener la fracción irreducible.

Ejemplo resuelto: 0,75
$0,75 = \frac{75}{100}$. Simplificando entre 25: $(75 \div 25) / (100 \div 25) = \frac{3}{4}$.

Ejemplo con enteros: 2,4
$2,4 = \frac{24}{10}$. Simplificando entre 2: $\left(\frac{24}{10} \div \frac{2}{2}\right) / \left(\frac{10}{10} \div \frac{2}{2}\right) = \frac{12}{5}$.

CONVERSIÓN: FRACCIONES Y DECIMALES

3 Decimal Periódico Puro a Fracción

Aplica cuando las cifras bajo el arco o barra periódica comienzan inmediatamente tras la coma.

- **Regla de nueves:** en el numerador se resta el número completo sin coma menos la parte entera.
- **Denominador:** se colocan tantos nueves (9) como cifras tenga el período.

Ejemplo resuelto: $0,\overline{3}$ (período de 1 cifra)
Numerador: 3 - 0 = 3.
Denominador: un 9.
Fracción: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
tras simplificar entre 3.

Ejemplo con parte entera: $1,2\overline{7}$ (período 27)
Numerador: 127 - 1 = 126.
Denominador: 99.
Fracción: $\frac{126}{99} = \frac{14}{11}$
tras simplificar entre 9.

4 Decimal Periódico Mixto a Fracción

Aplica cuando existen cifras entre la coma y el período (anteperíodo).

- **Numerador:** número completo hasta el final del primer período (sin comas) menos la parte no periódica (entero + anteperíodo).
- **Denominador:** tantos nueves (9) como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros (0) como cifras tenga el anteperíodo.

ERROR FRECUENTE
Confundir la cantidad de ceros en el denominador. Los ceros corresponden únicamente a las cifras del anteperíodo decimal, nunca a las cifras de la parte entera.

Ejemplo resuelto: $0,8\overline{3}$ (anteperíodo 8, período 3)
Numerador: 83 - 8 = 75.
Denominador: un 9 (por el 3) y un 0 (por el 8) = 90.
Fracción: $\frac{75/90}{9/90} = \frac{5}{6}$
(simplificado entre 15).

Ejemplo resuelto: $1,1\overline{6}$ (entero 1, anteperíodo 1, período 6)
Numerador: 116 - 11 = 105.
Denominador: un 9 y un 0 = 90.
Fracción: $\frac{105/15}{105/90} = \frac{7}{76}$
(simplificado entre 15).

5 Cuadro de Verificación y Equivalencias Clave

Tabla mnemotécnica para comprobación mental inmediata de fracciones y decimales frecuentes en resolución de problemas.

1/2 = 0,5 (Exacto)	1/4 = 0,25	3/4 = 0,75	
1/3 = $0,\overline{3}$ (Periódico Puro)	2/3 = $0,\overline{6}$		
1/5 = 0,2	2/5 = 0,4	3/5 = 0,6	4/5 = 0,8
1/6 = $0,1\overline{6}$ (Periódico Mixto)	5/6 = $0,8\overline{3}$		
1/8 = 0,125	3/8 = 0,375	5/8 = 0,625	7/8 = 0,875
1/9 = $0,\overline{1}$	1/10 = 0,1		

Comprobación Inversa

- Para verificar cualquier fracción generatriz obtenida, divide el numerador entre el denominador con calculadora o a mano: el resultado debe reproducir exactamente el decimal original.

Mapa Mental: Razones y Proporciones

1 Razón Aritmética vs. Razón Geométrica



Una razón es la comparación matemática entre dos cantidades homogéneas o medibles.

- **Razón Aritmética** (por diferencia): $a - b = r$. Muestra cuántas unidades excede una cantidad a la otra.
- **Razón Geométrica** (por cociente): $a / b = k$. Muestra cuántas veces contiene una cantidad a la otra.
- **Términos:** 'a' es el antecedente y 'b' es el consecuente.



$$a - b = r$$

$$\frac{a}{b} = k$$

2 Proporción y Propiedad Fundamental



Una proporción es la igualdad establecida entre dos razones geométricas equivalentes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

- **Estructura:** a y d son los extremos; b y c son los medios.
- **Propiedad Fundamental:** En toda proporción geométrica, el producto de los extremos es exactamente igual al producto de los medios ($a \cdot d = b \cdot c$).
- **Proporción Directa:** Dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar o dividir una por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo factor.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

RAZONES Y PROPORCIONES

3 Resolución Práctica de Incógnitas (Regla de Tres y Escalas)



Aplicación directa de la propiedad fundamental para despejar valores desconocidos y modelar mapas.

- **Despeje formal de incógnita:** Si $4 / 6 = 10 / x$, entences $4 \cdot x = 6 \cdot 10 \Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow x = 15$.
- **Aplicación en Escalas:** Escala = Longitud en dibujo / Longitud en realidad. Una escala 1:50.000 significa que 1 cm en el plano equivale a 50.000 cm (500 m) en el terreno real.

Ejemplo práctico:





1 Plantear la proporción
Alinear magnitudes correspondientes:
Dibujo / Real = 1 / 50.000 = 3 cm / x cm.

2 Aplicar producto cruzado
Multiplicar extremos por medios:
$1 \cdot x = 3 \cdot 50.000$.

3 Despejar y convertir unidades
$x = 150.000$ cm = 1.500 m = 1,5 km en la realidad.

4 Alerta de Precisión Matemática



Prevenir confusiones conceptuales críticas durante el cálculo de razones y proporciones.

- El orden antecedente/consecuente altera por completo el valor del cociente.
- Las unidades de medida deben ser homogéneas antes de establecer una razón.



ERROR FRECUENTE

¡Cuidado al multiplicar cruzado!
No confundas la suma de fracciones con la proporción: en $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se multiplica en cruz ($a \cdot d = b \cdot c$), jamás en línea recta ($a \cdot c$ no es igual a $b \cdot d$).

REGLA DE TRES SIMPLE

1 NÚCLEO CENTRAL: Proporcionalidad y Regla de Tres Simple

La regla de tres simple permite hallar un valor desconocido comparando dos magnitudes proporcionales organizadas en columnas emparejadas.

- Magnitud A frente a Magnitud B
- Valores conocidos: a1 se corresponde con b1
- Incógnita: a2 se corresponde con x

Tip de Identificación

Pregúntate siempre antes de calcular: si una magnitud sube, ¿la otra magnitud obligatoriamente sube o baja?

2 DIRECTA: A más, MÁS

Se aplica cuando dos magnitudes van en el mismo sentido: si una aumenta, la otra aumenta; si una disminuye, la otra disminuye en la misma proporción. El cálculo se realiza mediante multiplicación cruzada.

- Relación: a más cantidad, más costo; a menos tiempo, menos distancia
- Estructura: a1 ---> b1 | a2 ---> x
- Fórmula despejada: x = (a2 * b1) / a1



Ejemplo resuelto



5 cuadernos cuestan $15. Queremos saber el costo x de 8 cuadernos.

1 Paso 1: Plantear datos

5 cuadernos cuestan $15. Queremos saber el costo x de 8 cuadernos.

2 Paso 2: Multiplicar en cruz

Se multiplican los términos en diagonal conocidos: 8 * 15 = 120.

3 Paso 3: Dividir entre el término restante

x = 120 / 5 = $24. Comprobación: cada cuaderno cuesta $3, luego 8 * 3 = 24.

3 INVERSA: A más, MENOS

Se aplica cuando dos magnitudes van en sentidos opuestos: al aumentar una, la otra disminuye en proporción inversa. El cálculo se realiza mediante producto en línea horizontal.

- Relación: a más velocidad, menos tiempo de viaje; a más obreros, menos días de trabajo
- Estructura: a1 ---> b1 | a2 ---> x
- Fórmula despejada: x = (a1 * b1) / a2



Ejemplo resuelto



4 obreros tardan 12 días en levantar un muro. ¿Cuántos días x tardarán 6 obreros?

1 Paso 1: Plantear datos

4 obreros tardan 12 días en levantar un muro. ¿Cuántos días x tardarán 6 obreros?

2 Paso 2: Multiplicar en línea horizontal

El total de esfuerzo es constante: 4 obreros * 12 días = 48 obrero-días.

3 Paso 3: Dividir entre el nuevo valor

x = 48 / 6 = 8 días. A mayor cantidad de trabajadores, menor es el tiempo requerido.

¡ERROR FRECUENTE!:

No cruces en cruz si es inversa.

¡La clave está en el sentido de las magnitudes!

Regla de Tres Compuesta

1 Fundamentos y Concepsto Clave

La regla de tres compuesta permite calcular un valor desconocido cuando intervienen tres o más magnitudes interrelacionadas. Cada magnitud se compara por separado respecto a la magnitud que contiene la incógnita para determinar si su comportamiento es directamente proporcional (ambas aumentan o disminuyen juntas) o inversamente proporcional (una aumenta y la otra disminuye).

- **Magnitud Directa (+ a + / - a -):** al aumentar una variable, la variable con la incógnita también aumenta.
- **Magnitud Inversa (+ a - / - a +):** al aumentar una variable, la variable con la incógnita disminuye.

2 Métodos de Organización: Signos vs. Causa-Circunstancia-Efecto

Para resolver sin confusiones existen dos esquemas analíticos prácticos que estructuran las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes.

Método de Signos (+ / -)

Coloca la incógnita (x) con signo (+). Compara cada columna con la de la incógnita: si es inversa, asigna (+) arriba y (-) abajo; si es directa, asigna (-) arriba y (+) abajo.

La solución surge de multiplicar todos los (+) y dividir entre el producto de todos los (-).

Método Causa - Circunstancia - Efecto

Agrupa en **Causas** a los ejecutores (obreros, máquinas), en **Circunstancias** las condiciones temporales (días, horas/día, rendimiento) y en **Efecto** el resultado material producido (metros, piezas, zanjas, dificultad).

La fórmula general equilibra: (Causas 1 · Circunstancias 1 · Efecto 2) = (Causas 2 · Circunstancias 2 · Efecto 1).

REGLA DE TRES COMPUESTA

3 Problema Modelado Paso a Paso

Problema: 6 obreros trabajando 8 horas diarias construyen un muro de 120 metros en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 8 obreros trabajando 6 horas diarias para construir un muro de 180 metros?

- **Obreros vs. Dias:** Inversa (+ obreros implican - días). Factor: 6 / 8
- **Horas/día vs. Dias:** Inversa (+ h/d implican - días). Factor: 8 / 6
- **Metros vs. Dias:** Directa (+ metros implican + días). Factor: 180 / 120
- **Planteamiento:** $x = 10 \cdot (6 / 8) \cdot (8 / 6) \cdot (180 / 120)$
- **Simplificación:** $(6/8 \cdot 8/6 = 1) \rightarrow x = 10 \cdot (180 / 120) = 10 \cdot 1.5 = 15$ días.

x = 15 días

4 ⚠ ERROR FRECUENTE

Un fallo común consiste en comparar las magnitudes entre sí en lugar de evaluar cada una exclusivamente frente a la columna de la incógnita, o asumir por inercia que todas las variables son directas.

- Nunca compares '**obreros**' contra 'horas/día'; compara siempre 'obreros' frente a la variable objetivo ('días').
- Evita multiplicar en cruz de forma automática sin verificar el carácter inverso de los factores de tiempo y capacidad.

¿Cómo clasificar la variable evaluada frente a la magnitud que contiene a 'x'?

Si aumentar dicha magnitud requiere MENOS de la incógnita (ej. más obreros → menos días) ↓

Tratar como relación **INVERSA**: mantener el cociente invertido o aplicar signo (+) arriba y (-) abajo.

Si aumentar dicha magnitud requiere **MÁS** de la incógnita (ej. más obra → más días) ↓

Tratar como relación **DIRECTA**: mantener el cociente directo o aplicar signo (-) arriba y (+) abajo.

Mapa Mental: Porcentajes, Concepto y Cálculo Rápido

1 Concepto de Porcentaje y Fracción Centesimal

El porcentaje o tanto por ciento representa una razón referida a una base de 100 partes iguales. Expresar $a\%$ equivale algebraicamente a considerar la fracción $a/100$, estableciendo un puente directo entre el lenguaje porcentual, la fracción irreducible y el número decimal correspondiente.

- **Símbolo %:** indica cuántas partes de cada 100 se toman del total.
- **Forma de fracción centesimal:** $a\% = a/100$.
- **Forma decimal directa:** $a\% = a \div 100$ (desplazando la coma dos lugares a la izquierda, por ejemplo 45% = 0,45).

Regla Fundamental

Para operar con porcentajes en fórmulas o multiplicaciones directas, convierte siempre el porcentaje a su expresión decimal (÷ 100) o fracción equivalente.

2 Equivalencias Visuales Clave (Memorización Activa)

Asociar porcentajes frecuentes con fracciones irreducibles permite resolver cálculos de forma inmediata mediante simples divisiones sin recurrir a algoritmos complejos.

- 50% = $\frac{1}{2}$ = 0,50 (Dividir entre 2)
- 25% = $\frac{1}{4}$ = 0,25 (Dividir entre 4, o sacar la mitad de la mitad)
- 75% = $\frac{3}{4}$ = 0,75 (Calcular el 50% + 25%, o multiplicar la cuarta parte por 3)
- 20% = $\frac{1}{5}$ = 0,20 (Dividir entre 5)
- 10% = $\frac{1}{10}$ = 0,10 (Dividir entre 10 o mover la coma decimal un lugar a la izquierda)
- 5% = $\frac{1}{20}$ = 0,05 (Calcular la mitad exacta del 10%)
- 1% = $\frac{1}{100}$ = 0,01 (Dividir entre 100 o mover la coma dos lugares)

3 Técnicas de Cálculo Mental Rápido

El cálculo mental de porcentajes se agiliza combinando bloques de 10%, 1% o aplicando la propiedad conmutativa de la multiplicación.

- **Método de Descomposición:** desarmar porcentajes irregulares en sumas de porcentajes base (ejemplo: 15% = 10% + 5%).
- **Técnica de los Ceros (Regla del Producto):** $a\%$ de $b = (a \times b)/100$. Si ambos números terminan en cero, basta cancelar dos ceros y multiplicar los dígitos restantes.
- **Propiedad Conmutativa:** $a\%$ de $b = b\%$ de a. Útil cuando una de las cifras es más sencilla de procesar (ejemplo: 16% de 25 = 25% de 16 = 16 ÷ 4 = 4).

Pasos clave

1. **Paso 1: Identificar bases del 10% o 1%.** Obtén el 10% dividiendo la cantidad entre 10. Si requieres precisión de unidades, obtén el 1% dividiendo entre 100.
2. **Paso 2: Escalar y Combinar.** Multiplica y suma los bloques base obtenidos según el porcentaje requerido para alcanzar el valor final sin usar lápiz ni calculadora.

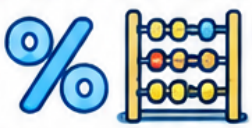
4 Ejemplo Numérico Resuelto: Cálculo Mental y Descomposición

Demostración guiada paso a paso para calcular el 35% de 240 aplicando descomposición modular rápida.

- **Paso A:** Calcular el 10% de 240 = 240 ÷ 10 = 24.
- **Paso B:** Calcular el 30% multiplicando por 3 el 10% = 24 × 3 = 72.
- **Paso C:** Calcular el 5% sacando la mitad exacta del 10% = 24 ÷ 2 = 12.
- **Paso D:** Sumar los componentes parciales = 30% + 5% = 72 + 12 = 84.

Resultado: El 35% de 240 es exactamente 84.

PORCENTAJES: CONCEPTO Y CÁLCULO RÁPIDO



5 ¿Qué Porcentaje Representa una Cantidad sobre Otra?

Para determinar qué porcentaje representa una parte (P) respecto a un total o base (T), se establece la relación cociente multiplicada por 100:

$$\text{Porcentaje} = \left(\frac{\text{Parte}}{\text{Total}}\right) \times 100$$

- **Fórmula general:** $\% = \left(\frac{P}{T}\right) \times 100$.
- **Ejemplo práctico resuelto:** En un grupo de 80 estudiantes, 28 prefieren álgebra. ¿Qué porcentaje representan?
- **Cálculo:** $\left(\frac{28}{80}\right) \times 100 = (7/20) \times 100 = 0{,}35 \times 100 = 35\%$.

6 ERROR FRECUENTE

Puntos críticos donde suelen cometerse equivocaciones conceptuales y de cálculo en evaluaciones de matemáticas básicas.

- **Confundir decimales en porcentajes menores a 10%:** El 6% es 0,06, NO 0,6 (0,6 corresponde al 60%).
- **Confundir la Parte con el Total:** Al calcular qué porcentaje representa 15 sobre 60, el denominador debe ser la base de referencia completa (15/60 = 25%), no la diferencia.
- **Sumar porcentajes sobre bases distintas:** Un aumento del 10% seguido de un descuento del 10% no deja la cantidad igual, pues la segunda operación se aplica sobre un total modificado.

ERROR FRECUENTE

¡Cuidado con la coma decimal en cifras de un dígito! 3% = 0,03. Escribir 0,3 equivale a calcular el 30%, multiplicando el resultado por diez de forma errónea.

Variaciones Porcentuales: Aumentos y Descuentos

1 Conceptos Clave y Factor Multiplicador

El factor multiplicador (FM) permite calcular el valor final de una cantidad a partir de un porcentaje de aumento o descuento.

$$FM = 1 + r / 100 \quad \text{(aumento)}$$

$$FM = 1 - r / 100 \quad \text{(descuento)}$$



2 Variaciones Sucesivas

Cuando una cantidad experimenta variaciones porcentuales consecutivas, cada cambio se aplica sobre el resultado inmediatamente anterior y nunca sobre la cantidad inicial.

$$FM_{total} = FM_1 * FM_2 * \ldots * FM_n$$

- **Aumentos Sucesivos:**
  +10% seguido de +20% → 1.10 * 1.20 = 1.32 (aumento real del +32%, no del 30%).
- **Descuentos Sucesivos:**
  20% seguido de 10% → 0.80 * 0.90 = 0.72 (descuento único del 28%, no del 30%).



VARIACIONES PORCENTUALES: AUMENTOS Y DESCUENTOS

3 Caso Práctico Comercial Resuelto

Resolución analítica paso a paso de una prenda comercial sujeta a rebaja de temporada y recargo de impuesto.

- **Datos iniciales:** Precio de etiqueta = 80 €; Descuento promocional = 25%; IVA posterior = 21%.
- **Paso 1 (Descuento):**
  $FM_{desc} = 1 - 0.25 = 0.75$.
  Precio con rebaja = 80 * 0.75 = 60 €.
- **Paso 2 (Impuesto):**
  $FM_{iva} = 1 + 0.21 = 1.21$.
  Precio final = 60 * 1.21 = 72.60 €.
- **Factor global compuesto:**
  $FM_{total} = 0.75 * 1.21 = 0.9075 \rightarrow$
  Variación neta = (0.9075 – 1) * 100 = –9.25% sobre el precio de etiqueta.



4 ¡ERROR FRECUENTE!



¡Nunca sumes ni restes porcentajes encadenados de forma directa!

Si un artículo baja 20% y luego sube 20%, NO regresa a su precio original (FM = 0.80 * 1.20 = 0.96; queda un 4% por debajo).

Del mismo modo, un descuento de 30% más otro de 20% no equivale a un 50% de descuento total.



Mapa Mental: Potenciación y Propiedades de los Exponentes

POTENCIACIÓN Y EXPONENTES

1 Estructura Básica de la Potencia

Una potencia representa una multiplicación repetida de la misma base tantas veces como indica el exponente.

Puntos clave:

- **Base (a):** factor que se multiplica por sí mismo
- **Exponente (n):** indica el número de repeticiones
- **Notación:** $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n factores)
- **Ejemplo:** $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

2 Producto y Cociente de Bases Iguales

Reglas fundamentales para operar productos y divisiones que comparten la misma base numérica o algebraica.

Puntos clave:

- **Producto:** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (se mantiene la base y se suman los exponentes)
- **Ejemplo producto:** $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$
- **Cociente:** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ con $a \neq 0$ (se mantiene la base y se restan exponentes)
- **Ejemplo cociente:** $\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2 = 25$

3 Potencia de Potencia y de Producto

Propiedades distributivas y de anidación exponencial.

Puntos clave:

- **Potencia de potencia:** $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (los exponentes se multiplican)
- **Ejemplo:** $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$
- **Potencia de producto:** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- **Potencia de cociente:** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (con $b \neq 0$)

4 Exponente Cero y Negativo

Comportamiento formal de exponentes no positivos con base distinta de cero.

Puntos clave:

- **Exponente cero:** $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$ (ejemplo: $7^0 = 1$)
- **Exponente negativo:** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (invierte la base al denominador)
- **Ejemplo negativo:** $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$
- **Fracción con negativo:** $(a/b)^{-n} = (b/a)^n$

5 Exponente Fraccionario y Radicales

Vínculo directo entre las potencias con numerador fraccionario y las raíces.

Puntos clave:

- **Relación fundamental:** $\frac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
- El denominador 'n' es el índice de la raiz
- El numerador 'm' es la potencia de la base
- **Ejemplo numérico:** $\frac{8^2}{8^{\frac{3}{3}}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

¡ERROR FRECUENTE!

Identificación de confusiones operativas comunes durante el cálculo de potencias.

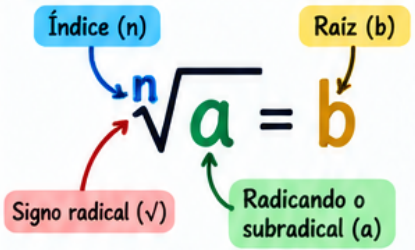
- **¡NO confundir potenciación con producto simple!**
- **Incorrecto:** $2^4 = 2 \cdot 4 = 8$ (falso)
- **Correcto:** $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- **Cuidado con los signos:** $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$, mientras que $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$

¡ERROR FRECUENTE!

Nunca multipliques la base directamente por el exponente (ejemplo erróneo: $3^4 \neq 12$; valor real: $3^4 = 81$). Además, recuerda que $a^0 = 1$ (salvo 0^0 que es indeterminado).

Radicación: Concepto y Propiedades Fundamentales

1 Anatomía del Radical



La radicación es la operación inversa a la potenciación. Se expresa formalmente como $\sqrt[n]{a} = b$ si y solo si $b^n = a$, donde el índice n indica cuántas veces debe multiplicarse la raíz b por sí misma para obtener el radicando a.

En resumen:

- Índice (n): número natural mayor o igual a 2 (cuando no se escribe, n = 2 por convención).
- Signo radical (√): símbolo operacional que delimita la expresión a evaluar.
- Radicando o subradical (a): número real al que se extrae la raíz.
- Raíz (b): resultado numérico exacto que verifica la potencia $b^n = a$.

2 Producto y Cociente

Cuando dos radicales poseen idéntico índice n, se pueden asociar o descomponer bajo un único signo radical mediante multiplicación y división directa de sus radicandos:

Producto de radicales:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Ejemplo: $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$

Cociente de radicales:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{a}}, \text{ con } b \neq 0.$$

Ejemplo: $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{250}{2}} = \sqrt[3]{125} = 5.$

3 Raíz de una Raíz y Potencia de un Radical

Las operaciones anidadas de radicación se rigen por la composición de exponentes fraccionarios:

Raíz de una raíz:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[(m \times n)]{a}$$

Se multiplican los índices.

Ejemplo: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2.$

Potencia de una raíz:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

La potencia ingresa al radicando o se evalúa externamente sin alterar el valor.

RADICACIÓN: Concepto y Propiedades Fundamentales

4 Extracción de Factores

Para simplificar un radical al máximo, se descompone el radicando en factores primos y se extraen las potencias múltiplos del índice aplicando las propiedades operativas.

1 Paso 1: Descomposición factorial

Expresar el radicando en factores primos.

Ejemplo con $\sqrt{72}$: $72 = 2^3 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 2^1 \cdot 3^2$.

2 Paso 2: Aplicar propiedad distributiva

Separar los factores de exponente igual al índice del radical: $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2}$.

3 Paso 3: Cancelar índice y potencia para extraer

Extraer los factores fuera del radical:

$2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (forma simplificada final).

5 ¡ERROR FRECUENTE!

El comportamiento del radicando y la existencia de raíces reales dependen estrictamente de la paridad del índice.

- **Índice impar:** $\sqrt[3]{-8} = -2$ (valido y bien definido en números reales, ya que $(-2)^3 = -8$).
- **Índice par con radicando negativo:** $\sqrt{-16}$ NO pertenece a los números reales (ningún número real al cuadrado produce un valor negativo). Requiere números imaginarios: $\sqrt{-16} = 4i$.

ERROR FRECUENTE

¡Cuidado! No confundas $\sqrt[n]{-a}$ con $-(\sqrt[n]{a})$.
Para índice par como n = 2, $\sqrt{-9}$ no existe en $\mathbb{R}$, mientras que $-\sqrt{9} = -3$.
Jamás distribuyas la raíz sobre sumas o restas:
$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (ejemplo: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$).

Mapa Mental: Simplificación y Operaciones con Radicales

SIMPLIFICACIÓN Y OPERACIONES CON RADICALES

1 Anatomía y Propiedades Fundamentales



Un radical consta del índice n, el signo radical y el radicando a: $\sqrt[n]{a} = b$ si y solo si $b^n = a$. Expresado en forma de potencia fraccionaria: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

- Raíz de un producto: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (para radicandos no negativos si n es par).
- Raíz de un cociente: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (con $b > 0$).
- Raíz de una raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ (se multiplican los índices).
- Potencia de una raíz: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

2 Extracción e Introducción de Factores



Permite simplificar radicales descomponiendo el radicando en factores primos y aplicando las propiedades de los exponentes.

- **Extracción:** Si el exponente del factor es mayor o igual al índice ($k \geq n$), se divide k entre n: el cociente sale como exponente fuera de la raíz y el residuo queda dentro.
- **Introducción:** Para introducir un factor externo dentro de un radical, se eleva dicho factor al índice de la raíz: $c \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{c^n \cdot a}$.

3 Suma y Resta de Radicales Semejantes



Dos o más radicales son semejantes únicamente si comparten el mismo índice y el mismo radicando. Solo los términos semejantes pueden sumarse o restarse factorizando el radical común.

- **Regla general:** $a \cdot \sqrt[n]{x} + b \cdot \sqrt[n]{x} = (a + b) \cdot \sqrt[n]{x}$
- **Estrategia obligatoria:** Antes de operar, simplifica cada radical individual extrayendo factores para descubrir términos semejantes ocultos.

4 Multiplicación y División de Radicales



El procedimiento varía según la coincidencia de los índices:

- **Mismo índice:** Multiplica o divide directamente los coeficientes entre sí y los radicandos bajo un único signo radical.
- **Diferente índice:** Reduce a índice común calculando el mínimo común múltiplo (mcm) de los índices originales, ajustando los exponentes internos en proporción.

5 Ejemplo Numérico Resuelto Paso a Paso



Cálculo y reducción de la expresión: $E = 2\sqrt{75} - \sqrt{27} + 3\sqrt{12}$

Paso 1: Descomposición en factores primos

Descomponemos los radicandos: $75 = 5^2 \cdot 3$, $27 = 3^3 = 2^2 \cdot 3$, y $12 = 2^2 \cdot 3$.

Paso 2: Extracción de factores

Aplicamos extracción: $2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$; $\sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$; $3\sqrt{2^2 \cdot 3} = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Paso 3: Reducción de términos semejantes

Sumamos algebraicamente los coeficientes de $\sqrt{3}$: $(10 - 3 + 6)\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$.



¡ERROR FRECUENTE!: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Contraejemplo: $\sqrt{9+16} = 5 \neq 7$.

¡ALERTA CRÍTICA!

Nunca separes una raíz que contiene sumas o restas directas en su interior. Primero opera la suma o resta dentro del radicando, o factoriza si es posible.

Mapa Mental: Racionalización de Denominadores

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

1 Propósito y Regla Central

La racionalización transforma una expresión fraccionaria con radicales en el denominador a una fracción equivalente cuyo denominador sea un número entero o una expresión libre de raíces.

Regla fundamental: para mantener la igualdad numérica se debe multiplicar numerador y denominador por la misma expresión (equivalente a multiplicar por la unidad neutra 1).

- Elimina raíces del divisor facilitando cálculos, sumas fraccionarias y límites analíticos.
- Mantiene invariable el valor numérico global de la fracción original.
- Se clasifica en tres métodos clave según el tipo de radical en el denominador.

2 Caso 1: Monomio con Raíz Cuadrada Simple

Aplicca a expresiones de la forma $\frac{a}{\sqrt{b}}$. Multiplica el numerador y el denominador por el mismo radical $\sqrt{b}$. Dado que $(\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{b}) = (\sqrt{b})^2 = b$, la raíz desaparece del denominador.

- **Fórmula general:**

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{(\sqrt{b} \cdot \sqrt{b})} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

- **Ejemplo paso a paso:**

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

1. **Paso 1: Identificar el radical**
   Reconocer la raíz cuadrada en el denominador que requiere eliminación (por ejemplo, $\sqrt{3}$).
2. **Paso 2: Multiplicar por factor unitario**
   Multiplicar numerador y denominador por la misma raíz cuadrada ($\sqrt{3}$ / $\sqrt{3}$).
3. **Paso 3: Simplificar y reducic coeficientes**
   Elevar al cuadrado el denominador para liberar la base y simplificar los factores racionales si es posible.

3 Caso 2: Monomio con Raíz de Índice n

Aplica a expresiones de la forma $\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}}$, donde $k < n$. El factor multiplicador debe completar el exponente interior hasta alcanzar el índice n exacto: $\sqrt[n]{b^{n-k}}$.

- **Propiedad aplicada:**

$$\sqrt[n]{b^k} \cdot \sqrt[n]{b^{n-k}} = \sqrt[n]{b^n} = b$$

- **Ejemplo resuelto:**

$$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$$

4 Caso 3: Binomio con Radicales y Conjugado

Aplica cuando el denominador es una suma o resta de dos términos con al menos una raíz cuadrada: $\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ o $\frac{c}{a \pm \sqrt{b}}$.

Se multiplica por el binomio conjugado para generar una diferencia de cuadrados notables: $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$.

- Si el denominador tiene suma $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, su conjugado es la resta $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.
- Si el denominador tiene resta $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$, su conjugado es la suma $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

- **Ejemplo resuelto:**

$$\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1}$$

$$\frac{4(\sqrt{5}+1)}{4} = \sqrt{5}+1$$

5 ¡ERROR FRECUENTE!

Multiplicar únicamente el denominador por el radical altera por completo el valor de la fracción. La multiplicación debe realizarse siempre en numerador y denominador de forma simultánea.

Mapa Mental: Notación Cientifica y Cifras Significativas

NOTACIÓN CIENTÍFICA Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

1 Estructura Base de la Notación Científica

La notación cientifica expresa cantidades muy grandes o muy pequeñas mediante el producto de una mantisa por una potencia de 10.

- **Forma general:** $a \times 10^n$, donde $1 \leq |a| < 10$ y n es un número entero.
- **Mantisa (a):** contiene la cifra entera distinta de cero y los decimales significativos.
- **Exponente positivo (n > 0):** indica magnitudes mayores a 10; la coma decimal se movió n posiciones hacia la izquierda.
- **Exponente negativo (n < 0):** indica magnitudes decimales menores a 1; la coma decimal se movió |n| posiciones hacia la derecha.

Regla Fundamental de la Mantisa
La mantisa a solo puede tener un único dígito distinto de cero a la izquierda de la coma decimal.

2 Cifras Significativas y Reglas de Redondeo

Las cifras significativas representan la precisión real de una medición experimental o cálculo numérico.

- Todos los dígitos distintos de cero siempre son significativos (ej. 452 tiene 3 CS).
- Los ceros situados entre dígitos distintos de cero cuentan como significativos (ej. 4,008 tiene 4 CS).
- Los ceros a la izquierda del primer dígito no nulo nunca son significativos (ej. 0,0052 tiene solo 2 CS).
- Los ceros finales a la derecha de la coma decimal sí son significativos (ej. 3,50 tiene 3 CS).
- **Redondeo:** si el primer dígito descartado es ≥ 5, se incrementa en una unidad el último digito retenido.

3 Conversiones Resueltas de Cantidades

Procedimientos directos para transformar cantidades entre notación decimal estándar y notación cientifica normalizada.

- **Distancia astronómica:**
  149.600.000 km = $1{,}496 \times 10^8$ km
  (la coma se desplaza 8 lugares hacia la izquierda).
- **Masa molecular diminuta:**
  0,00000028 g = $2{,}8 \times 10^{-7}$ g
  (la coma se desplaza 7 lugares hacia la derecha).
- **Longitud microscópica:**
  0,0000450 m = $4{,}50 \times 10^{-5}$ m
  (se conservan 3 cifras significativas).

4 Operaciones Aritméticas Fundamentales

Leyes de los exponentes aplicadas a la multiplicación y división de cantidades en notación cientifica.

1 Multiplicación

Multiplica las mantisas y suma algebraicamente los exponentes: $(a \times 10^n) \cdot (b \times 10^m) = (a \cdot b) \times 10^{n+m}$.
Ejemplo: $(3 \times 10^4) \cdot (2 \times 10^3) = 6 \times 10^7$.

2 División

Divide las mantisas y resta el exponente del divisor: $(a \times 10^n) \div (b \times 10^m) = (a / b) \times 10^{n-m}$.
Ejemplo: $(8 \times 10^6) \div (2 \times 10^2) = 4 \times 10^4$.

3 Normalización del Resultado

Si el producto o cociente de las mantisas resulta fuera del rango [1, 10), reajusta la mantisa y modifica el exponente en consecuencia.

¿El resultado de operar las mantisas está dentro del intervalo $1 \leq |a| < 10$?

Sí (está entre 1 y 9,99...)	No (es ≥ 10)	No (es < 1)
Mantener la mantisa y el exponente calculado sin molificaciones adicionales.	Mover la coma un lugar hacia la izquierda y sumar +1 al exponente resultante.	Mover la coma un lugar hacia la derecha y restar −1 al exponente resultante.

5 Alerta de Error Frecuente

Comprobaciones críticas para evitar fallos de cálculo comunes con exponentes y decimales.

- **Dirección del exponente:** Recuerda que números pequeños (< 1) requieren exponente negativo (10^{-n}), mientras que números grandes (> 10) requieren exponente positivo (10^n).
- **Contar ceros en lugar de posiciones:** Cuenta siempre el número de saltos reales de la coma decimal, nunca la cantidad visible de ceros.
- **Mantisas no normalizadas:** Expresiones como 45×10^3 o $0{,}3 \times 10^5$ son incorrectas en notación cientifica estándar; deben expresarse como $4{,}5 \times 10^4$ y 3×10^4.

ERROR FRECUENTE
¡Cuidado al desplazar la coma! Escribir 0,0005 como 5×10^4 en lugar de 5×10^{-4} invierte la magnitud por un factor de 100.000.000.

Lenguaje Algebraico y Expresiones Básicas

1 Conceptos Clave

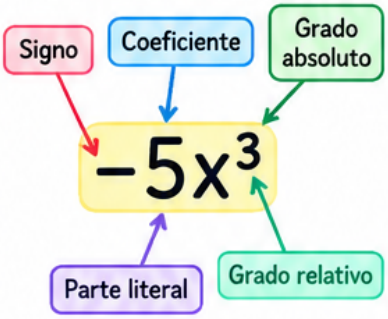
El lenguaje algebraico permite generalizar relaciones numéricas mediante letras (variables o incógnitas), números (constantes) y signos de operación. Transforma enunciados verbales en modelos matemáticos precisos y estructurados.

- **Variable**: símbolo literal que representa un valor desconocido o genérico.
- **Constante**: valor numérico fijo y determinado en la expresión.
- **Operadores**: signos aritméticos (+, −, ×, ÷) que vinculan términos y definen relaciones de cambio.



2 Anatomía de un Término Algebraico

Un término algebraico es una combinación indivisible de números y letras unidos exclusivamente por multiplicación o potenciación.



3 Diccionario Verbal a Álgebra

Traducción sistemática de locuciones castellanas a operaciones algebraicas elementales:

Expresión verbal	Expresión algebraica
El doble de un número	$2x$
El triple de un número	$3x$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$ o $(\frac{1}{2})x$
La tercera parte de un número	$\frac{x}{3}$
Un número aumentado en k unidades	$x + k$
Un número disminuido en k unidades	$x - k$
El consecutivo o siguiente de un entero	$x + 1$
El antecesor de un entero	$x - 1$
Dos números enteros pares consecutivos	$2n$ y $2n + 2$
Dos números enteros impares consecutivos	$2n + 1$ y $2n + 3$
El cuadrado de la suma de dos números	$(a + b)^2$
La suma de los cuadrados de dos números	$a^2 + b^2$

Lenguaje Algebraico

4 Ejemplo Resuelto

Modelo: La edad de Javier excede en 6 años al doble de la edad de Lucía. Si ambas edades suman 36 años, ¿cuál es la expresión del modelo?

1. **Paso 1: Identificación de incógnitas**
   Asignar una variable al valor de referencia principal.
   Definir x = edad de Lucía.
2. **Paso 2: Traducción de condiciones relacionales**
   Expresar la edad de Javier en función de x:
   el doble de la edad de Lucía = $2x$;
   excede en 6 años = $2x + 6$.
3. **Paso 3: Formulación de la ecuación total**
   Plantear la suma de las dos edades:
   $x + (2x + 6) = 36$.
4. **Paso 4: Reducción de términos semejantes**
   Agrupar coeficientes de variable y constantes:
   $3x + 6 = 36$. Restar 6 en ambos miembros:
   $3x = 30$; dividir entre 3: $x = 10$
   (Lucía = 10 años, Javier = 26 años).



5 ¡ERROR FRECUENTE!

Diferencia entre "$x - 8$" y "$8 - x$".



$x - 8$ (restar 8 de x) $\neq$ $8 - x$ (restar x de 8)

¡Cuidado!

Invertir el orden cambia el minuendo y el sustraendo, alterando el signo del resultado final.



Mapa Mental 25: Polinomios: Clasificación, Suma y Resta

1 Definición y Anatomía del Término

Un monomio consta de coeficiente numérico, variables y exponentes enteros no negativos. El grado absoluto es la suma de los exponentes de sus variables.

- **Coeficiente:** número con su signo respectivo (−5 en $-5x^2y^3$).
- **Parte literal:** variables y potencias (x^2y^3).
- **Grado de monomio:** exponente total ($2 + 3 = 5$).
- **Polinomio:** suma algebraica de dos o más monomios no semejantes.

2 Clasificación por Número de Términos

Los polinomios se catalogan según la cantidad de monomios no combinables que los constituyen:

- **Monomio:** 1 solo término algebraico (ejemplo: $7x^3$).
- **Binomio:** 2 términos unidos por suma o resta (ejemplo: $4x^2 - 9$).
- **Trinomio:** 3 términos algebraicos (ejemplo: $2x^2 + 5x - 3$).
- **Polinomio general:** 4 o más términos (ejemplo: $x^3 - 3x^2 + 4x - 8$).

3 Criterio Riguroso de Términos Semejantes

Dos o más términos son estrictamente semejantes únicamente si comparten las mismas variables con exponentes idénticos para cada variable.

- **Son semejantes:** $5a^2b$ y $-3a^2b$ (idéntica parte literal a^2b).
- **NO son semejantes:** $4xy^2$ y $4x^2y$ (los exponentes de x e y difieren).
- **Regla de reducción:** sumar o restar coeficientes numéricos conservando intacta la parte literal común: $7m^2 - 2m^2 = 5m^2$.

POLINOMIOS: CLASIFICACIÓN, SUMA Y RESTA

4 Métodos Operativos de Suma y Resta

Para operar polinomios se ordenan en potencias descendentes y se agrupan columnas o bloques de monomios semejantes.

- **Método Horizontal:** agrupar términos semejantes con paréntesis y operar coeficientes: $(3x^2 + 2x) + (5x^2 - 6x) = (3+5)x^2 + (2-6)x = 8x^2 - 4x$.
- **Método Vertical:** alinear polinomios en columnas de igual grado y operar por columnas verticales.
- **Resta de Polinomios:** transformar la resta en suma del polinomio opuesto invirtiendo todos los signos del sustraendo.

5 Ejemplo Guiado de Suma y Resta

Dados $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ y $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 6$:

- **Suma P(x) + Q(x):** $(4+2)x^3 + (-2+3)x^2 + (5-7)x + (-1+6) = 6x^3 + x^2 - 2x + 5$.
- **Resta P(x) − Q(x):** $(4x^3 - 2x^2 + 5x - 1) - (2x^3 + 3x^2 - 7x + 6)$.
- **Distribución del signo negativo:** $4x^3 - 2x^2 + 5x - 1 - 2x^3 - 3x^2 + 7x - 6$.
- **Resultado final de la resta:** $(4-2)x^3 + (-2-3)x^2 + (5+7)x + (-1-6) = 2x^3 - 5x^2 + 12x - 7$.

6 ¡ERROR FRECUENTE!

El Signo Negativo Afecta a TODO el Paréntesis

Al restar un polinomio sustraendo, el signo menos (−) delante de un paréntesis invierte obligatoriamente los signos de CADA UNO de los términos interiores.

- **INCORRECTO:** $(5x^2 - 3x + 2) - (2x^2 - 4x - 7) = 5x^2 - 3x + 2 - 2x^2 - 4x - 7$ (olvidar distribuir el menos).
- **CORRECTO:** $5x^2 - 3x + 2 - 2x^2 + 4x + 7 = 3x^2 + x + 9$ (signos invertidos: $-2x^2$, $+4x$, $+7$).

Alerta Visual de Signos

Nunca suprimas paréntesis precedidos de signo menos sin cambiar previamente los signos de todos los términos dentro de él.

Mapa Mental: Multiplicación y División de Polinomios

1 Propiedad Distributiva y Producto de Monomio por Polinomio

La multiplicación de expresiones algebraicas descansa en la distribución término a término aplicando la ley de signos y la suma de exponentes de bases iguales.

- **Regla de los exponentes:** al multiplicar potencias de igual base se suman los exponentes, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- **Monomio por polinomio:** $a \cdot (b + c + d) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d$.
- **Ejemplo clave:** $3x^2 \cdot (2x^3 - 5x + 4) = 6x^5 - 15x^3 + 12x^2$.

2 Multiplicación de Binomios: Método FOIL y Polinomios Generales

Para multiplicar dos binomios se multiplican los cuatro pares posibles: Primeros, Exteriores, Interiores y Últimos (FOIL). En polinomios de más términos, cada monomio del primero se multiplica sistemáticamente por cada monomio del segundo.

- **F** (First / Primeros): primer término del primer binomio por primer término del segundo.
- **O** (Outer / Exteriores): primer término por el último término.
- **I** (Inner / Interiores): segundo término por el primero del segundo binomio.
- **L** (Last / Últimos): producto de los dos segundos términos.
- **Reducción final:** agrupar y sumar términos semejantes resultantes.

Ejemplo Desarrollado FOIL

$(2x + 3)(x - 5) = (2x \cdot x) + (2x \cdot (-5)) + (3 \cdot x) + (3 \cdot (-5)) = 2x^2 - 10x + 3x - 15 = 2x^2 - 7x - 15$.

3 División Tradicional de Polinomios (Algoritmo Euclideo)

Permite dividir un polinomio dividendo P(x) entre un divisor D(x) hasta obtener un cociente C(x) y un resto R(x) cuyo grado sea estrictamente menor que el grado de D(x).

- **Condición de grado:** Grado[R(x)] < Grado[D(x)].
- **Identidad fundamental de la división:** $P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$.
- **Comprobación:** si el resto R(x) = 0, la división es exacta y D(x) es factor de P(x).

1 Paso 1: Ordenar y Completar
Ordenar de forma decreciente según el grado y colocar $0x^4$ en las potencias faltantes del dividendo.

2 Paso 2: Dividir el término lider
Dividir el término de mayor grado del dividendo entre el término lider del divisor para obtener el término del cociente.

3 Paso 3: Multiplicar y Restar
Multiplicar el término hallado por todendo y repetir y restar dásta producta al del résiado sea (cambiando los signos).

$P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$

Operaciones con Polinomios: Multiplicación y División

4 Regla de Ruffini para Divisores Lineales

Método abreviado aplicable de forma optima cuando el divisor tiene la forma canónica $(x - c)$.

- **Fila superior:** escribir exclusivamente los coeficientes del dividendo completo y ordenado.
- **Vértice izquierdo:** ubicar la raíz del divisor c (si el divisor es $x + 3$, se coloca -3).
- **Mecánica:** bajar el primer coeficiente, multiplicar por c, colocar bajo el siguiente coeficiente y sumar en columna de forma iterativa.
- **Interpretación:** el último valor es el Resto numérico; los números anteriores son los coeficientes del cociente C(x) con un grado menor.

Ejemplo: $(2x^4 - 3x^3 + x - 5) + (x + 2) \rightarrow c = -2$

c = −2	2	−3	0	1	−5	
	↓	↓	↓	↓	
	2	−7	14	−27	
Cociente	2	−7	14	−27	Resto −59

5 ¡ERROR FRECUENTE!

El error más común y destructivo al operar polinomios es no completar los términos con coeficiente cero antes de iniciar la división.

- Si el dividendo es $2x^4 - 3x + 1$, debe escribirse obligatoriamente como $2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 3x + 1$.
- Omitir los ceros desalinea las columnas de potencias y genera sumas algebraicas inválidas.
- En Ruffini, olvidar escribir el '0' en el espacio de una potencia ausente invalida completamente todo el cociente y el resto.

ERROR FRECUENTE

¡CUIDADO! Nunca comiences una división tradicional o de Ruffini sin verificar que el dividendo esté COMPLETO y ORDENADO. Cada grado ausente debe ocupar su columna con coeficiente 0.

Mapa Mental: Productos Notables — Cuadrados y Conjugados

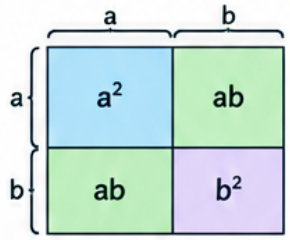
1 Cuadrado de un Binomio Suma

Regla algebraica: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
El cuadrado de la suma de dos términos equivale al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

Fórmula general:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Interpretación geométrica:
Área total de un cuadrado de lado (a + b) subdividido en cuatro regiones: un cuadrado a^2, dos rectángulos de área ab y un cuadrado b^2.



Ejemplo resuelto:

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

2 Cuadrado de un Binomio Diferencia

Regla algebraica: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
El cuadrado de la resta equivale al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término. El último término siempre conserva signo positivo.

Fórmula general:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Signo clave:
El signo menos únicamente afecta al término central del doble producto (−2ab).

Ejemplo resuelto:

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

3 Binomios Conjugados

Regla algebraica: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
La multiplicación de la suma de dos monomios por su diferencia produce de manera directa una diferencia de cuadrados perfectos.

Fórmula general:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Cancelación de términos medios:
+ab y −ab se anulan mutuamente, eliminando el término lineal central.

Ejemplo con variables:

$$(3x + 4)(3x - 4) = (3x)^2 - (4)^2 = 9x^2 - 16$$

Cálculo mental numérico:

$$52 \times 48 = (50 + 2)(50 - 2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496$$

PRODUCTOS NOTABLES: Cuadrados y Conjugados

4 Guía Rápida de Identificación y Resolución

Flujo de decisión procedimental para aplicar la estructura directa correspondiente según los términos del producto notable presentado.

1. **Paso 1: Identificar la estructura**
   Determina si se trata de un binomio elevado a potencia 2 (cuadrado) o del producto de dos binomios idénticos con signos opuestos (conjugados).
2. **Paso 2: Reconocer términos "a" y "b"**
   Aísla el primer monomio 'a' y el segundo monomio 'b' con sus coeficientes numéricos y exponentes intactos.
3. **Paso 3: Aplicar fórmula directa**
   Sustituye en $a^2 \pm 2ab + b^2$ para binomios al cuadrado, o en $a^2 - b^2$ si son conjugados.
4. **Paso 4: Desarrollar potencias y coeficientes**
   Eleva al cuadrado coeficientes y variables, asegurando multiplicar correctamente los productos mixtos.

5 ¡ERROR FRECUENTE!

Equívocos sistemáticos en álgebra escolar que distorsionan el desarrollo de productos notables.

- **Falsa distributividad de la potencia:** $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$. Olvidar el doble producto 2ab es un error común.
- **Comprobación numérica rápida:** Si $a = 3$ y $b = 2$: $(3 + 2)^2 = 5^2 = 25$, mientras que $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$ ($25 \neq 13$).
- **Signo en binomio al cuadrado negativo:** $(a - b)^2$ NO termina en $-b^2$. Recuerda que $(-b)^2 = +b^2$.

¡CUIDADO! ERROR FRECUENTE

$(a + b)^2$ **NUNCA** es igual a $a^2 + b^2$.
La potenciación no es distributiva con respecto a la suma ni a la resta: el término central 2ab **es obligatorio.**

Mapa Mental 28: Productos Notables — Cubos y Término Común

PRODUCTOS NOTABLES: CUBOS Y STEVIN

1 Cubo de una Suma y Cubo de una Diferencia

El cubo de un binomio genera un polinomio de 4 términos con coeficientes numéricos basados en el triángulo de Pascal (1, 3, 3, 1). La regla nemotécnica define: el cubo del primer término, más o menes el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, más o menos el cubo del segundo término.

- **Suma al cubo:** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (todos los signos positivos).
- **Resta al cubo:** $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (signos alternados: +, −, +, −).
- **Estructura de grados:** el exponente de 'a' desciende de 3 a 0, mientras que el de 'b' asciende de 0 a 3.

Regla de Signos Alternados

En el desarrollo de $(a - b)^3$, las potencias impares de b conservan signo negativo: b^3 da $-3a^2b$ y b^3 da $-b^3$, mientras que b^2 se vuelve positivo.

1. **Identificar términos**
   Reconocer con precisión el primer término (a) y el segundo término (b), incluyendo coeficientes o signos propios.
2. **Plantear el esquema de coeficientes 1-3-3-1**
   Escribir la plantilla: $(\ )^3 \pm 3(\ )^2(\ ) + 3(\ )(\ )^2 \pm (\ )^3$ antes de operar potencias.
3. **Desarrollar potencias y productos**
   Elevar al cuadrado y cubo cada monomio antes de multiplicar por los factores numéricos 3.

2 Binomios con Término Común (Identidad de Stevin)

Al multiplicar dos binomios lineales que comparten una misma variable, el desarrollo produce un trinomio cuadrático: el cuadrado del término común, más la suma algebraica de los términos no comunes multiplicada por el término común, más el producto algebraico de los términos no comunes.

- **Fórmula general:** $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + (a \cdot b)$.
- **Término cuadrático:** resulta de elevar el término común al cuadrado (x^2).
- **Término lineal central:** coeficiente dado por la adición con signos ($a + b$).
- **Término independiente final:** resultado del producto con ley de signos ($a \cdot b$).

Ley de Signos en Stevin

Respete rigurosamente los signos negativos al sumar algebraicamente y al multiplicar: $(-5)(+2) = -10$, mientras que $(-5) + (+2) = -3$.

3 Ejemplos Numéricos Resueltos Paso a Paso

Aplicación guiada de los productos notables fundamentales analizados en esta unidad:

- **Ejemplo Cubo:**

$$(2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 + (3)^3$$
$$= 8x^3 + 3(4x^2)(3) + 3(2x)(9) + 27$$
$$= \mathbf{8x^3 + 36x^2 + 54x + 27.}$$

- **Ejemplo Stevin:**

$$(x + 5)(x - 2) = x^2 + (5 - 2)x + (5)(-2)$$
$$= \mathbf{x^2 + 3x - 10.}$$

- **Ejemplo Stevin con ambos negativos:**

$$(y - 4)(y - 6) = y^2 + (-4 - 6)y + (-4)(-6)$$
$$= \mathbf{y^2 - 10y + 24.}$$

4 Alerta: Errores Frecuentes

Identificación de los tropiezos algebraicos más habituales para prevenir confusiones en evaluaciones y ejercicios prácticos:

- **Omitir los términos centrales:** Afirmar erróneamente que $(a + b)^3 = a^3 + b^3$ (falso: faltan siempre $+ 3a^2b + 3ab^2$).
- **Confundir suma y producto en Stevin:** En $(x - 3)(x + 7)$, escribir $x^2 + 21x - 4$ en lugar del cálculo correcto $x^2 + 4x - 21$.
- **Olvidar elevar el coeficiente numérico al cuadrado en el término triple:** en $3(2x)^2(3)$, calcular erróneamente $3(2x^2)(3) = 18x^2$ en vez de $3(4x^2)(3) = 36x^2$.

ERROR FRECUENTE

¡El exponente NO se distribuye sobre la suma ni la resta!
$(x \pm y)^3$ NUNCA es igual a $x^2 \pm y^3$.
El binomio al cubo consta obligatoriamente de cuatro términos.

¡Las reglas hacen la diferencia!

Factorización: Factor Común y Agrupación

1 Fundamentos y Factor Común Monomio

Factorizar consiste en transformar una suma algebraica en el producto indicado de sus factores irreducibles. La extracción del **factor común monomio** es el punto de partida esencial en el álgebra.

- **Definición de Factor Común:** Es el Máximo Común Divisor (MCD) de los coeficientes numéricos multiplicado por las variables repetidas con su menor exponente.
- **Procedimiento directo:** Identificar el MCD numérico, seleccionar las letras comunes elevadas a la menor potencia y dividir cada término del polinomio original entre dicho monomio.
- **Comprobación por propiedad distributiva:** El producto del factor común por el polinomio resultante debe reconstruir con exactitud la expresión original.



Regla de los Exponentes

Al dividir potencias de la misma base para obtener los términos internos del paréntesis, recuerda restar los exponentes:

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}.$$

2 Ruta de Decisión para Factorizar

Sigue esta guía lógica paso a paso para determinar qué método emplear según la estructura de términos de la expresión algebraica.

¿Tienen todos los términos variables o factores numéricos en común?

- **Sí, todos los términos comparten divisores o variables** → Extraer directamente el Factor Común Monomio o Polinomio calculando el MCD y la menor potencia.
- **No, pero la expresión tiene un número par de términos (4 o 6)** → Aplicar Factorización por Agrupación: agrupa en pares o ternas con factores parciales comunes y extrae el binomio resultante.

3 Ejemplos Resueltos

Modelos prácticos de aplicación de factor común monomio y factorización por agrupación con su respectiva comprobación.

- **Ejemplo 1 (Factor Común Monomio):**
  $6x^3 + 9x^2 = 3x^2(2x + 3)$.
  Comprobación: $3x^2 * 2x + 3x^2 * 3 = 6x^3 + 9x^2$.
- **Ejemplo 2 (Agrupación de Términos):**
  $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$.
- **Ejemplo 3 (Agrupación con Signo Negativo):**
  $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = x^2(2x - 3) + 2(2x - 3) = (2x - 3)(x^2 + 2)$.

¡CUIDADO CON EL SIGNO MENOS!

Al agrupar términos precedidos por un signo negativo, los signos dentro del paréntesis cambian obligatoriamente:

$-(ax - b)$ equivale a $-ax + b$.

Factorización: Factor Común y Agrupación

4 Alerta Crítica: Errores Frecuentes y Autoevaluación

Evita el fallo clásico en la extracción de factores monomios idénticos y consolida tu aprendizaje.

- **ERROR FRECUENTE:** Omitir el término '+ 1' al factorizar una expresión donde uno de los monomios es idéntico al factor común extraído.
- **Demostración del error:** Al factorizar $4x^2 + 2x$, escribir incorrectamente $2x(2x)$ en lugar del resultado correcto $2x(2x + 1)$.
- **Comprobación de control:** El polinomio resultante dentro del paréntesis debe conservar obligatoriamente la misma cantidad de términos que la expresión original.

ERROR FRECUENTE: El Factor Fantasma

Si divides un término entre sí mismo (2x / 2x), el resultado es 1, NUNCA 0 ni se suprime. Si tu polinomio original tenía 3 términos, dentro del paréntesis deben quedar exactamente 3 términos.

¡Revisa tus pasos!

5 Paso a Paso: Método por Agrupación

Paso 1: Identificación y Agrupación

Asocia términos en pares que compartan coeficientes múltiplos o variables comunes utilizando paréntesis protectores.

Paso 2: Extracción Parcial

Extrae el factor común de cada grupo independiente para generar un binomio o polinomio repetido.

Paso 3: Extracción Total y Validación

Extrae el polinomio repetido como factor global y multiplica los factores para verificar la identidad con la expresión original.

6 Resumen Visual

Fórmulas clave:

- Factor común: $ax + ay = a(x + y)$
- Agrupación: $ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$
- MCD: $6x^3 + 9x^2 = 3x^2(2x + 3)$

Recuerda:

- ✓ El factor común puede ser numérico, literal o ambos.
- ✓ En la agrupación, los términos deben estar en pares o ternas.
- ✓ Verifica siempre con la propiedad distributiva.



Mapa Mental: Factorización de Cuadrados y Cubos

1 Identificación Visual de Binomios Notables

Un binomio factorizable por identidades notables consta de dos términos separados por suma o resta. El primer paso consiste en **determinar** si los exponentes son múltiplos de 2 (cuadrados) o múltiplos de 3 (cubos), y si los coeficientes numéricos tienen raíz exacta.

- **Cuadrados perfectos:** coeficientes con raíz cuadrada entera (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...) y variables con exponente par (x^2, y^4, a^6, z^8).
- **Cubos perfectos:** coeficientes con raíz cúbica entera (1, 8, 27, 64, 125, 216...) y variables con exponente múltiplo de 3 (x^3, y^6, a^9, b^{12}).

¿Qué tipo de binomio tienes y cuál es su signo de enlace?

Dos términos cuadrados con signo negativo ($a^2 - b^2$)	Aplica Diferencia de Cuadrados: extree raíces cuadradas y expresa como $(a + b)(a - b)$.
Dos términos cuadrados con signo positivo ($a^2 + b^2$)	No factorizable en $\mathbb{R}$. No intentes descomponerlo como suma al cuadrado.
Dos términos cúbicos con signo positivo ($a^3 + b^3$)	Aplica Suma de Cubos: $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
Dos términos cúbicos con signo negativo ($a^3 - b^2$)	Aplica Diferencia de Cubos: $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

2 Diferencia de Cuadrados Perfectos

Fórmula fundamental: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
El resultado corresponde a la multiplicación de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de cada término (binomios conjugados).

- **Paso 1:** Extrae la raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{(a^2)} = a$.
- **Paso 2:** Extrae la raíz cuadrada del segundo término: $\sqrt{(b^2)} = b$.
- **Paso 3:** Construye dos paréntesis, uno con signo positivo y otro con signo negativo: $(a + b)(a - b)$.

Casos Resueltos:

Caso Resuelto 1: $9x^2 - 25$

Raíz del primero: $\sqrt{(9x^2)} = 3x$.

Raíz del segundo: $\sqrt{(25)} = 5$.

Factorización directa:

$(3x + 5)(3x - 5)$.

Caso Resuelto 2: $49m^4 - 16n^6$

Raíz del primero: $\sqrt{(49m^4)} = 7m^2$.

Raíz del segundo: $\sqrt{16n^6} = 4n^3$.

Factorización directa:

$(7m^2 + 4n^3)(7m^2 - 4n^3)$.

FACTORIZACIÓN DE CUADRADOS Y CUBOS

3 Suma y Diferencia de Cubos Perfectos

Fórmulas maestras: Suma $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ y **Diferencia** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
Cada expresión se descompone en un factor binomio lineal y un factor trinomio cuadrático irreducible en los reales.

- **Regla mnemotécnica de signos (SOAP):** Mismo signo en el binomio (Same), Signo Opuesto en el término central del trinomio (Opposite), Siempre Positivo en el último término (Always Positive).
- **Término central del trinomio:** es el producto simple $(a \cdot b)$, nunca el doble producto $(2ab)$.

Ejemplos:

Ejemplo Suma de Cubos: $x^3 + 64$

Raíces cúbicas: $\sqrt[3]{(x^3)} = x$, $\sqrt[3]{(64)} = 4$.

Binomio base: $(x + 4)$.

Trinomio asociado: $x^2 - 4x + 16$.

Resultado final: $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$.

Ejemplo Diferencia de Cubos: $8y^3 - 27$

Raíces cúbicas: $\sqrt[3]{(8y^3)} = 2y$, $\sqrt[3]{(27)} = 3$.

Binomio base: $(2y - 3)$.

Trinomio asociado: $4y^2 + 6y + 9$.

Resultado final: $(2y - 3)(4y^2 + 6y + 9)$.

4 Guía Rápida de Verificación y Errores Críticos

Verifica siempre tu factorización multiplicando los términos para comprobar que recuperas el binomio original. Evita confusiones habituales entre productos notables y factorización.

- **Comprobación algebraica:** $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.
- El trinomio resultante de la suma o diferencia de cubos ($a^2 \mp ab + b^2$) no tiene raíces reales y no debe intentarse factorizar más.

ERROR FRECUENTE: Suma de Cuadrados

¡ALERTA ROJA! La suma de cuadrados $a^2 + b^2$ **NO** es igual a $(a + b)^2$, ni a $(a + b)(a + b)$, ni a $(a + b)(a - b)$. En los números reales, $a^2 + b^2$ es un binomio irreducible (primo).

Recuerda: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Factorización de Trinomios: Cuadrado Perfecto y Forma General

Factorización de Trinomios

1 Identificación Rápida: Tipos de Trinomios



Antes de factorizar, clasifica la **estructura del trinomio** observando los coeficientes y las raíces de los extremos.

- **Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP):** presenta dos términos cuadráticos positivos y el término central cumple $2 \cdot a \cdot b$.
- **Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$:** el coeficiente principal es 1 y se buscan dos enteros con producto c y suma b.
- **Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$:** el coeficiente principal a es distinto de 1 y **requiere descomposición cruzada (aspa simple).**

2 Ruta de Factorización Paso a Paso



Aplica el algoritmo correspondiente según la **estructura** identificada para descomponer el polinomio en sus factores irreducibles.

1 Paso 1: Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP)

Extrae la raíz cuadrada del primer y tercer término: $\sqrt{(a^2)} = a$, $\sqrt{(b^2)} = b$. Verifica que el término intermedio sea exactamente $2 \cdot a \cdot b$.
El resultado es $(a \pm b)^2$, conservando el signo central.

2 Paso 2: Forma $x^2 + bx + c$

Abre dos binomios $(x + ?)(x + ?)$. Determina dos valores r y s cuyo producto sea c y cuya suma algebraica sea b. Coloca los valores hallados respetando sus signos: $(x + r)(x + s)$.

3 Paso 3: Forma $ax^2 + bx + c$ (Aspa Simple)

Descompón ax^2 en dos factores (a_1x y a_2x) y el término independiente c en (c_1 y c_2). Multiplica en cruz $(a_1x \cdot c_2 + a_2x \cdot c_1)$ y comprueba que la suma coincida con bx. Escribe los binomios horizontales: $(a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$.

3 Ejemplos Numéricos Resueltos



Modelos prácticos de aplicación directa para cada tipología:

TCP

$x^2 - 10x + 25 \rightarrow \sqrt{(x^2)} = x, \ \sqrt{(25)} = 5.$
Doble producto: $2(x)(5) = 10x$.
Factorización final: $(x - 5)^2$.

Forma $x^2 + bx + c$

$x^2 + 7x + 12 \rightarrow$ Factores de 12 que sumen 7: 3 y 4 $(3 \cdot 4 = 12, \ 3 + 4 = 7)$.
Factorización final: $(x + 3)(x + 4)$.

Forma $ax^2 + bx + c$

$2x^2 + 7x + 3 \rightarrow$ Factores de $2x^2$: $(2x)(x)$; factores de 3: $(1)(3)$.
Aspa: $2x \cdot 3 + x \cdot 1 = 6x + x = 7x$.
Factorización final: $(2x + 1)(x + 3)$.



ERROR FRECUENTE

Regla de signos: Si c es positivo ($x^2 - bx + c$), ambos factores comparten el signo de b (ambos negativos o ambos positivos). Si c es negativo ($x^2 + bx - c$), los factores tienen signos opuestos y el número de mayor valor absoluto conserva el signo de b. No intercambies los signos al verificar en cruz.

4 Lista de Verificación de Factores



Comprueba siempre tus binomios resultantes mediante desarrollo distributivo **rápido antes de dar por cerrada la factorización.**

- ☑ Multiplica los primeros términos para verificar **ax^2**.
- ☑ Multiplica los términos extremos **e internos (FOIL)** para **sumar y constatar** el término **lineal bx.**
- ☑ Multiplica los términos independientes para validar **c** y su signo.
- ☑ Asegúrate de que los coeficientes dentro **de cada binomio no contengan factores comunes remanentes.**

Mapa Mental: Fracciones Algebraicas

Fracciones Algebraicas: Simplificación y Operaciones

1 Dominio y Valores Excluidos

Una fracción algebraica $P(x)/Q(x)$ solo existe para valores de x donde el denominador no es cero: $Q(x) \neq 0$. Determinar los valores prohibidos antes de cualquier simplificación evita indeterminaciones.

- Identificar el denominador $Q(x)$ y plantear la ecuación $Q(x) = 0$.
- Resolver la ecuación para hallar las raíces prohibidas del dominio.
- Ejemplo: en $(x + 2) / (x^2 - 9)$, $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x \neq 3$ y $x \neq -3$.

Valores Críticos

Los valores excluidos deben registrarse al inicio del ejercicio; la cancelación posterior no elimina la restricción original del dominio.

2 Simplificación por Factorización

Para reducir una fracción algebraica a su mínima expresión, se factorizan por completo numerador y denominador para cancelar exclusivamente factores comunes idénticos.

- **Paso 1:** Factorizar $P(x)$ y $Q(x)$ usando factor común, trinomios o diferencia de cuadrados.
- **Paso 2:** Identificar factores binómicos idénticos en numerador y denominador.
- **Paso 3:** Cancelar factores multiplicativos aplicando la propiedad $a \cdot k / (b \cdot k) = a / b$.

3 Suma y Resta con MCM de Denominadores

La adición y sustracción de fracciones con distinto denominador requiere construir el mínimo común denominador algebraico (MCM de polinomios).

- Factorizar cada denominador en factores primos lineales e irreducibles.
- MCM = producto de factores comunes y no comunes con su mayor exponente.
- Homogeneizar numeradores, sumar/restar términos semejantes y simplificar el resultado.

Pasos clave

1. **Factorizar denominadores**
   Escribir cada denominador en su forma descompuesta irreducible.
2. **Armar el MCM**
   Tomar todos los factores presentes con su máxima potencia observada.
3. **Amplificar y operar**
   Multiplicar cada numerador por los factores faltantes y combinar términos.

4 Multiplicación y División Racional

El producto se calcula multiplicando numeradores y denominadores entre sí previa factorización; la división se transforma en producto invirtiendo la fracción divisora.

- **Multiplicación:** $(A/B) \cdot (C/D) = (A \cdot C) / (B/D)$, factorizando antes de expandir.
- **División:** $(A/B) \div (C/D) = (A/B) \cdot (D/C)$ con restricciones adicionales para $C(x) \neq 0$.
- **Simplificación cruzada** inmediata entre numeradores y denominadores factorizados.

5 Ejemplo Numérico y Algebraico Resuelto

Resolución completa paso a paso de una operación combinada modelo:

- **Expresión:**
  $$[(x^2 - 4) / (x^2 + 3x + 2)] \div \left[\frac{(x - 2)}{(x + 1)}\right]$$
- **Factorización:**
  $$[(x - 2)(x + 2)] / [(x + 2)(x + 1)]$$
- **Invertir divisor:**
  $$\cdot [(x + 1) / (x - 2)]$$
- **Cancelación:**
  $$\frac{[(x - 2)(x + 2)(x + 1)]}{(x + 2)(x + 1)(x - 2)} = 1$$
  (para $x \notin \{-2, -1, 2\}$).

6 Alerta: Error Frecuente en Cancelación

$$\frac{x + 5}{x + 2}$$

¡PROHIBIDO CANCELAR SUMANDOS!

Solo se cancelan factores completos que multiplican a todo el numerador y a todo el denominador.

- **INCORRECTO:** $(x + 5) / (x + 2) \neq 5/2$ (tachar "x" es un error grave de álgebra).
- **CORRECTO:** $(x \cdot 5) / (x \cdot 2) = 5/2$ (válido porque "x" es factor multiplicativo).
- **Regla de oro:** si hay un signo "+" o "-" separando términos sin factorizar, no se puede simplificar.

ERROR FRECUENTE

Nunca simplifiques términos dentro de sumas o restas. Factoriza primero; si la expresión no se deja factorizar en términos idénticos, queda irreducible.

Ecuaciones Lineales de Primer Grado

1 Concepto de Igualdad y Balanza Matemática

Una ecuación de primer grado es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas que se mantiene en equilibrio, análoga a una balanza de dos platos.



- Miembro izquierdo = Miembro derecho: cualquier alteración en un platillo debe aplicarse exactamente igual en el otro para conservar el equilibrio.
- **Incógnita (x)**: valor numérico desconocido que tiene exponente 1 y satisface la igualdad.

2 Reglas de Transposición de Términos

Para despejar la incógnita se aplican operaciones inversas a ambos lados de la ecuación.

+	−
−	+
×	÷
÷	×

- Lo que está sumando (+) pasa al otro miembro restando (−).
- Lo que está restando (−) pasa al otro miembro sumando (+).
- Lo que está multiplicando pasa al otro miembro dividiendo con su mismo signo.
- Lo que está dividiendo pasa al otro miembro multiplicando con su mismo signo.

3 Ruta de Resolución Paso a Paso

Secuencia ordenada para resolver ecuaciones lineales enteras o con paréntesis.



1. **Eliminar paréntesis**
   Aplicar la propiedad distributiva multiplicando el coeficiente exterior por cada término interior, cuidando la ley de signos.
2. **Agrupar términos con incógnita**
   Trasponer todos los términos con "x" al miembro izquierdo y las constantes numéricas al miembro derecho.
3. **Reducir términos semejantes**
   Sumar o restar algebraicamente los coeficientes de x y operar las constantes numéricas.
4. **Despejar la incógnita**
   Dividir ambos miembros por el coeficiente numérico de x para obtener el valor final.

Ecuaciones Lineales de 1.er Grado



4 Resolución de Ecuaciones con Denominadores

Procedimiento para simplificar y resolver ecuaciones de primer grado fraccionarias.



- Calcular el MCM de todos los denominadores presentes en ambos miembros de la ecuación.
- Multiplicar cada término de la ecuación completa por dicho MCM para eliminar las fracciones.
- Resolver la ecuación entera resultante siguiendo los pasos generales de transposición.

5 Ejemplo Numérico Resuelto y Verificación

Resolución completa paso a paso:
$3(x - 2) + 5 = 2x + 7$.

1. Paso 1: Aplicar distributiva:
   $3x - 6 + 5 = 2x + 7$
2. Paso 2: Simplificar constantes del miembro izquierdo:
   $3x - 1 = 2x + 7$
3. Paso 3: Transponer términos:
   $3x - 2x = 7 + 1$
4. Paso 4: Reducir y obtener solución:
   $x = 8$

Verificación sustituyendo x = 8:
$3(8 - 2) + 5 = 3(6) + 5 = 18 + 5 = 23$;
$2(8) + 7 = 16 + 7 = 23$.
La igualdad 23 = 23 se cumple.

6 ¡ERROR FRECUENTE!

Identificación de los errores más comunes cometidos al despejar.



Olvidar cambiar el signo al trasponer sumandos. Por ejemplo, en "x + 4 = 10", escribir incorrectamente "x = 10 + 4" (error) en lugar de "x = 10 − 4" (correcto: x = 6).

Asimismo, al trasponer un divisor negativo como en "−2x = 8", el signo se conserva al dividir: x = 8 / (−2) = −4.

Problemas de Aplicación con Ecuaciones Lineales

Método de 5 Pasos para Problemas Verbales

Estrategia secuencial para transformar enunciados cotidianos en modelos algebraicos de primer grado listos para resolver.

1 Lectura comprensiva e incógnita
Identificar qué magnitud desconocida pide el problema y definir la variable x con su unidad de medida correspondiente.

2 Traducción al lenguaje algebraico
Expresar las demás cantidades del texto en términos de x mediante sumas, diferencias o múltiplos.

3 Planteamiento de la ecuación
Igualar las expresiones algebraicas según la condición o equilibrio que establece el enunciado.

4 Resolución algebraica
Despejar la incógnita agrupando términos semejantes y aplicando operaciones inversas.

5 Comprobación contextual
Verificar que el valor obtenido tenga sentido físico y cumpla con las condiciones iniciales del problema.



Tipologías Frecuentes de Aplicación

Estructuras clave para organizar los datos según el contexto analizado:



Problemas de edades
Construir tabla temporal (Pasado, Presente, Futuro) sumando o restando los años transcurridos.



Reparto proporcional
Expresar cada parte como múltiplo de x y sumar las partes para igualar al total general.



Problemas de mezclas y valor
Multiplicar la cantidad de cada componente por su precio o concentración unitaria.



Movimiento rectilíneo uniforme
Aplicar la relación Distancia = Velocidad × Tiempo para plantear igualdades de trayecto.

Problema Tipo Resuelto: Reparto y Edades

Enunciado: La suma de las edades de Ana y Bruno es 48 años. Ana tiene el triple de la edad de Bruno. ¿Qué edad tiene cada uno?

1. **Planteamiento:** Edad de Bruno = x; Edad de Ana = 3x
2. **Ecuación:** $x + 3x = 48$
3. **Despeje:** $4x = 48 \rightarrow x = 48 / 4 \rightarrow x = 12$
4. **Solución:** Bruno tiene 12 años y Ana tiene 36 años ($3 \times 12 = 36$)
5. **Comprobación:** 12 + 36 = 48 años (cumple exactamente el total)

ERROR FRECUENTE

Asignar la variable x a la magnitud equivocada o invertir la relación de comparación (por ejemplo, escribir "x = 3 × Bruno" en vez de vincular Ana respecto a Bruno), lo que conduce a resultados invertidos o fraccionarios absurdos.

Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2: Métodos Algebraicos

Fundamento del Sistema 2x2 y Modelo de Demostración

Un sistema 2x2 consta de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución común es el par ordenado (x, y) que satisface ambas simultáneamente. Para comparar los tres métodos algebraicos, se utiliza el sistema de referencia:

$$\begin{cases} \text{Ecuación [1]:} & 2x + y = 7 \\ \text{Ecuación [2]:} & x - y = 2 \end{cases}$$

- **Objetivo común:** Reducir dos incógnitas a una sola ecuación lineal de primer grado.
- **Solución gráfica e interpretativa:** Punto de intersección único de dos rectas en el plano cartesiano.
- **Sistema modelo de trabajo:** [1] $2x + y = 7$ y [2] $x - y = 2$.

Sistemas Lineales 2x2: Métodos Algebraicos

1 Método 1: Sustitución

Consiste en despejar una incógnita en cualquiera de las ecuaciones y sustituir dicha expresión en la otra ecuación.

Pasos:

1. **Paso 1:** Despejar 'y' en la ecuación [1]: $y = 7 - 2x$.
2. **Paso 2:** Sustituir en la ecuación [2]: $x - (7 - 2x) = 2$.
3. **Paso 3:** Resolver: $x - 7 + 2x = 2 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$.
4. **Paso 4:** Hallar la otra variable: $y = 7 - 2(3) \rightarrow y = 1$.

Solución: $x = 3,\ y = 1$

2 Método 2: Igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las dos expresiones resultantes.

Pasos:

1. **Paso 1:** Despejar 'y' en ambas ecuaciones: De [1] se obtiene $y = 7 - 2x$; de [2] se obtiene $y = x - 2$.
2. **Paso 2:** Igualar expresiones: $7 - 2x = x - 2$.
3. **Paso 3:** Resolver la ecuación lineal: $7 + 2 = x + 2x \rightarrow 9 = 3x \rightarrow x = 3$.
4. **Paso 4:** Sustituir para encontrar 'y': $y = 3 - 2 \rightarrow y = 1$.

Solución: $x = 3,\ y = 1$

3 Método 3: Reducción (Suma y Resta)

Consiste en igualar los coeficientes de una incógnita (con signos opuestos) y sumar verticalmente ambas ecuaciones para eliminarla.

Pasos:

1. **Paso 1:** Alinear coeficientes: Los coeficientes de 'y' ya son opuestos (+1 y −1).
2. **Paso 2:** Sumar miembro a miembro: $(2x + x) + (y - y) = 7 + 2 \rightarrow 3x + 0 = 9$.
3. **Paso 3:** Despejar: $x = 9 / 3 \rightarrow x = 3$.
4. **Paso 4:** Sustituir x en [1]: $2(3) + y = 7 \rightarrow 6 + y = 7 \rightarrow y = 1$.

Solución: $x = 3,\ y = 1$

4 Convergencia y Verificación de la Solución

Los tres métodos algebraicos son equivalentes y conducen de forma unívoca a la solución común ($x = 3, y = 1$). La comprobación valida ambas igualdades originales: $2(3) + 1 = 7$ $(7 = 7)$ y $3 - 1 = 2$ $(2 = 2)$.

Puntos clave:

- Sustitución es ideal cuando alguna variable tiene coeficiente 1 o −1.
- Igualación resulta práctica si una incógnita se despeja con facilidad en ambas expresiones.
- Reducción es el camino más rápido para sistemas con coeficientes enteros mayores a 1.

5 ERROR FRECUENTE: Regla de Signos al Multiplicar Ecuaciones

Al aplicar el método de reducción y multiplicar toda una ecuación por un número negativo, olvidas con frecuencia distribuir el signo en el segundo miembro (término independiente).

Ejemplo:

Multiplicar $(x - y = 2)$ por -2 debe dar $-2x + 2y = -4$, nunca $+4$ ni $+2$.

Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2: Método Gráfico y Determinantes

1 Estructura General: Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2

Un **sistema lineal** de dos ecuaciones con dos incógnitas (2x2) tiene la forma general

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Cada ecuación representa geométricamente una recta en el plano cartesiano. La solución del sistema corresponde al conjunto de pares ordenados (x, y) que satisfacen ambas ecuaciones simultánaamente.

- **Forma canónica:** $a_1x + b_1y = c_1$ y $a_2x + b_2y = c_2$ con coeficientes reales.
- **Incógnitas:** x e y representan las coordenadas del punto común en el plano cartesiano.
- **Dos enfoques complementarios:** análisis geométrico visual (posición relativa de las rectas) y cálculo algebraico analítico (determinantes 2x2).

2 Rama 1: Interpretación Geométrica y Clasificación de Sistemas

La **relación espacial** entre las dos rectas en el plano determina la cantidad de soluciones que posee el sistema lineal:

- **Sistema Compatible Determinado (SCD):** Las rectas son secantes y se cortan en un único punto (x_0, y_0). Pendientes distintas ($m_1 \neq m_2$). Posee una única solución.
- **Sistema Incompatible (SI):** Las rectas son paralelas y no se intersectan en ningún punto. Pendientes iguales ($m_1 = m_2$) y diferente ordenada al origen ($b_1 \neq b_2$). Cero soluciones (conjunto vacío $\emptyset$).
- **Sistema Compatible Indeterminado (SCI):** Las rectas son coincidentes (la misma recta superpuesta). Pendientes iguales y misma ordenada al origen. Posee infinitas soluciones.

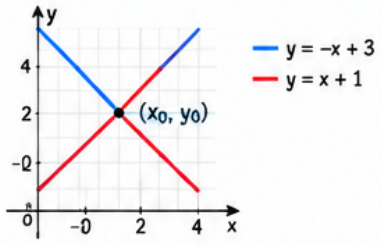
3 Rama 2: Resolución Analítica mediante Determinantes (Regla de Cramer)

La Regla de Cramer utiliza matrices cuadradas de orden 2x2 para resolver sistemas lineales mediante el cálculo de determinantes numéricos. El valor de un determinante de orden 2 se define como el producto de la diagonal principal menos el producto de la diagonal secundaria:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \cdot d) - (b \cdot c).$$

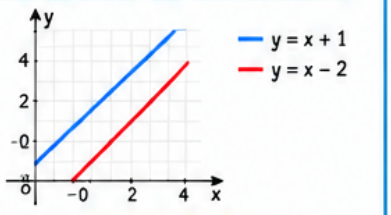
- Determinante del Sistema (Δs):
$$\Delta s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1).$$
- Determinante de x (Δx):
$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = (c_1 \cdot b_2) - (c_2 \cdot b_1).$$
- Determinante de y (Δy):
$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot c_2) - (a_2 \cdot c_1).$$
- Cálculo de las incógnitas:
$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \; ; \; y = \frac{\Delta y}{\Delta s} \quad \text{(siempre que } \Delta s \neq 0\text{)}.$$

4 Interpretación Gráfica: SCD (Solución Única)



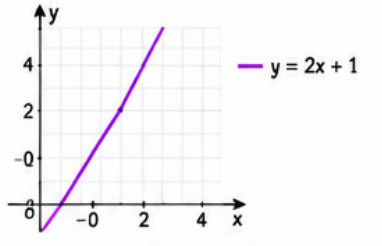
SCD (Solución única)

5 Interpretación Gráfica: SI (Sin Solución)



SI (Sin solución)

6 Interpretación Gráfica: SCI (Infinitas Soluciones)



SCI (Infinitas soluciones)

7 Ejemplo Numérico Resuelto Paso a Paso

Resolver el sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

1. $\Delta s = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1) - (5)(3) = -17$
2. $\Delta x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (8)(-1) - (3)(3) = -17$
3. $\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (5)(8) = -34$
4. $x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{-17}{-17} = 1 \; ; \; y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{-34}{-17} = 2$

Resultado: Solución única en el punto (1, 2). En la gráfica, ambas rectas se intersectan exactamente en (1, 2) (SCD).

8 Puntos Críticos y Verificación

Reglas de control matemático para evitar errores habituales al operar con matrices 2x2 y signos negativos.

- **Cuidado con los signos negativos** al restar la diagonal secundaria: $(a \cdot d) - (b \cdot c)$. Si b o c son negativos, el signo cambia a positivo.
- **Comprobación obligatoria:** sustituye siempre x e y en ambas ecuaciones del enunciado para corroborar la igualdad.

9 Resumen

- Forma general: $a_1x + b_1y = c_1$ y $a_2x + b_2y = c_2$.
- Tres casos: SCD (única), SI (ninguna), SCI (infinitas).
- Regla de Cramer: $x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \; ; \; y = \frac{\Delta y}{\Delta s}$ $(\Delta s \neq 0)$.
- Verifica siempre el resultado en ambas ecuaciones.

10 ¡ERROR FRECUENTE!

Determinante Principal Nulo ($\Delta s = 0$)

¡Nunca dividas entre cero!

Si $\Delta s = 0$, la Regla de Cramer directa no puede aplicarse. Esto no significa que el ejercicio esté "mal hecho", sino que el sistema no es compatible determinado: si $\Delta x = 0$ y $\Delta y = 0$, el sistema tiene infinitas soluciones (rectas coincidentes, SCI); si $\Delta x \neq 0$ o $\Delta y \neq 0$, el sistema no tiene solución (rectas paralelas, SI).

Mapa Mental 37:
Ecuaciones Cuadráticas — Métodos Directos y Factorización

Ecuaciones Cuadráticas: Métodos Directos y Factorización

1 Estructura General de la Ecuación Cuadrática

Toda ecuación cuadrática se expresa en la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son coeficientes reales con $a \neq 0$. Si todos los coeficientes son distintos de cero, la ecuación es completa; si $b = 0$ o $c = 0$, se clasifica como incompleta y admite métodos de resolución directos sin necesidad de aplicar la fórmula general.

- Forma canónica: $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$)
- **Ecuación incompleta pura:** $ax^2 + c = 0$ (carece de término lineal, $b = 0$)
- **Ecuación incompleta mixta:** $ax^2 + bx = 0$ (carece de término independiente, $c = 0$)
- **Ecuación completa factorizable:** trinomios factorizables por inspección o aspa simple

2 Incompletas Puras: Despeje y Extracción Directa de Raíz

Cuando $b = 0$, la ecuación adopta la forma $ax^2 + c = 0$. Se aísla la variable x^2 transponiendo el término independiente y dividiendo por el coeficiente cuadrático: $x^2 = \frac{-c}{a}$. Al aplicar la raíz cuadrada en ambos miembros, se obtienen dos raíces simétricas reales siempre que el cociente sea no negativo.

- Despeje: $x^2 = \frac{-c}{a}$
- Extracción: $x = \pm\sqrt{(-\frac{c}{a}}$
- Ejemplo resuelto: $2x^2 - 18 = 0 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3$
- Si el radicando es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.

¡ERROR FRECUENTE!

Omitir el **doble signo** (±) al extraer la raíz cuadrada. Escribir $x^2 = 9 \rightarrow x = 3$ descarta la mitad de las soluciones. La raíz cuadrada genera dos valores: $x_1 = +3$ y $x_2 = -3$.

3 Incompletas Mixtas: Factor Común y Producto Cero

Cuando $c = 0$, la ecuación toma la forma $ax^2 + bx = 0$. Dado que ambos términos comparten la variable x, se extrae x como factor común monomio: $x(ax + b) = 0$. Por la propiedad del producto cero, si el producto de dos factores es nulo, al menos uno de ellos debe ser cero, garantizando que $x_1 = 0$ siempre sea una solución.

- Factoricación: $x(ax + b) = 0$
- **Propiedad del producto cero:** $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ó $B = 0$
- **Solución 1:** $x_1 = 0$ (siempre presente en ecuaciones incompletas mixtas)
- **Solución 2:** $ax + b = 0 \rightarrow x_2 = \frac{-b}{a}$
- **Ejemplo resuelto:** $3x^2 + 12x = 0 \rightarrow 3x(x + 4) = 0 \rightarrow x_1 = 0; x + 4 = 0 \rightarrow x_2 = -4$

4 Ecuaciones Completas: Factorización Inmediata de Trinomios

Para ecuaciones completas $ax^2 + bx + c = 0$ con $a = 1$ (trinomio de la forma $x^2 + bx + c = 0$), se buscan dos números r y s cuya suma algebraica sea igual a b ($r + s = b$) y cuyo producto sea igual a c ($r \cdot s = c$). La expresión se descompone en binomios con término común $(x + r)(x + s) = 0$, igualando cada factor a cero.

- Regla de signos: analizar los signos de b y c para determinar los signos de r y s
- Factorización: $(x + r)(x + s) = 0$
- Despeje final: $x_1 = -r$, $x_2 = -s$
- Ejemplo resuelto: $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow$ Buscamos dos números que sumados den -5 y multiplicados den +6 (-2 y -3) $\rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$

5 Pasos para Resolver Ecuaciones Cuadráticas

1 Identificar el tipo de ecuación

Determinar si la ecuación es incompleta pura ($b=0$), incompleta mixta ($c=0$) o completa factorizable ($ax^2+bx+c=0$).

2 Aplicar el método directo o factor común

Despejar directamente x^2 en puras, extraer x como factor común en mixtas, o descomponer en dos factores binomios en completas.

3 Igualar a cero y obtener ambas raíces

Aplicar la propiedad del producto cero o la raíz con doble signo (±) para documentar formalmente el conjunto solución (x_1, x_2).

6 ¿Qué método aplicar según los coeficientes de $ax^2 + bx + c = 0$?

Falta el término lineal ($b = 0$)

Aislar x^2 y aplicar raíz cuadrada con doble signo: $x = \pm\sqrt{(-c/a)}$.

Falta el término independiente ($c = 0$)

Extreer factor común monomio x: $x(ax + b) = 0$, asegurando $x_1 = 0$ y $x_2 = -b/a$.

Están presentes a, b y c (con $a = 1$)

Buscar factores $(x + r)(x + s) = 0$ tales que $r + s = b$ y $r \cdot s = c$.

ECUACIONES CUADRÁTICAS: FÓRMULA GENERAL Y DISCRIMINANTE

1 Estructura Canónica y Fórmula General

Toda ecuación cuadrática se expresa en su forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son coeficientes reales con $a \neq 0$. La fórmula general proporciona de manera directa todas las raíces posibles:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

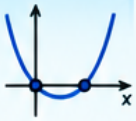
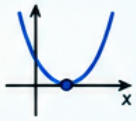
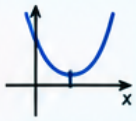
- **Fórmula cuadrática completa:** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- **Coeficiente principal a:** acompaña al término cuadrático x^2 y nunca puede ser cero
- **Coeficiente lineal b:** acompaña al término de primer grado x
- **Término independiente c:** constante numérica libre de variable

2 Análisis Cualitativo del Discriminante (Δ)

La expresión subradical $\Delta = b^2 - 4ac$ determina la naturaleza y cantidad de soluciones sin necesidad de resolver la ecuación completa.

- $\Delta > 0$: Existen dos raíces reales y distintas (la parábola interseca al eje X en dos puntos)
- $\Delta = 0$: Existe una única raíz real doble (la parábola es tangente al eje X en su vértice)
- $\Delta < 0$: No existen raíces reales; produce dos raíces complejas conjugadas (la parábola no toca el eje X)

¿Cuál es el signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ en la ecuación cuadrática?

$\Delta > 0$ →	Calcular dos raíces reales distintas mediante $(-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$ y $(-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$.	
$\Delta = 0$ →	Obtener la solución real única doble en el vértice $x = -b / (2a)$.	
$\Delta < 0$ →	Concluir que no hay corte con el eje X real; expresar raíces en el plano complejo como $x = (-b \pm i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}) / (2a)$.	

3 Resolución Analítica Paso a Paso

Ejemplo práctico de aplicación para la ecuación cuadrática: $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

1. **Identificar coeficientes**
   Extraer los valores respetando sus signos: $a = 2$, $b = -5$, $c = -3$.
2. **Calcular el discriminante Δ**
   Evaluar $\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-3) = 25 - (-24) = 25 + 24 = 49$. Al ser $\Delta > 0$, existen dos raíces reales distintas.
3. **Sustituir en la fórmula general**
   Aplicar $x = (-(-5) \pm \sqrt{49}) / (2 \cdot 2) = (5 \pm 7) / 4$.
4. **Obtener las raíces x_1 y x_2**
   Calcular primera solución $x_1 = (5 + 7) / 4 = 12 / 4 = 3$.
   Calcular segunda solución $x_2 = (5 - 7) / 4 = -2 / 4 = -1/2$.

4 ¡ERROR FRECUENTE!

El error algebraico más recurrente al resolver ecuaciones de segundo grado ocurre al omitir la multiplicación de signos cuando c o a son números negativos.

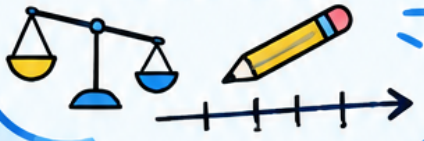
- **Incorrecto:** En $2x^2 - 5x - 3 = 0$, escribir $(-5)^2 - 4(2)(3) = 25 - 24 = 1$ (olvidar el signo de $c = -3$).
- **Correcto:** Mantener el signo: $(-5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49$.
- **Precaución adicional:** Recordar que $(-5)^2 = +25$, nunca -25; elevar al cuadrado cualquier número real produce siempre un valor no negativo.

ALERTA: SIGNO DE −4ac Y PARÉNTESIS DE b^2

Coloca siempre paréntesis al sustituir coeficientes negativos: $(-b)$ y $(b)^2$, y multiplica primero los signos del producto $-4 \cdot a \cdot c$ antes de restar o sumar.

Mapa Mental: Desigualdades e Inecuaciones Lineales

DESIGUALDADES E INECUACIONES LINEALES



1 Símbolos de Orden

Una desigualdad compara dos expresiones matemáticas indicando cuál es mayor, menor o si pueden ser equivalentes en magnitud.

- $<$: Menor que (ejemplo: $3 < 8$)
- $>$: Mayor que (ejemplo: $5 > -2$)
- $\leq$: Menor o igual que (incluye el valor límite)
- $\geq$: Mayor o igual que (incluye el valor límite)
- $\neq$: Desigual o distinto (no define relación de orden directa)

2 Propiedades de las Desigualdades

Operaciones básicas permitidas al transformar inecuaciones algebraicas sin alterer la solución.

- **Suma y resta:** Sumar o restar el mismo valor en ambos miembros mantiene el sentido de la desigualdad (si $a < b$, entonces $a + c < b + c$).
- **Multiplicación o división por positivo:** Multiplicar o dividir por un valor $c > 0$ preserva el sentido (si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$).
- **Transitividad:** Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

3 Representación Gráfica e Intervalos

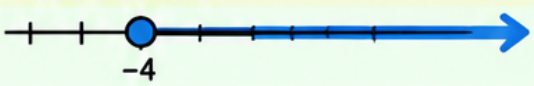
La solución de una inecuación lineal ser un conjunto infinito de números reales representables en la recta numérica.

- **Intervalo abierto** (a, b) o $(-\infty, b)$: No incluye los extremos; se dibuja con círculo vacío (○) en la recta numérica.
- **Intervalo cerrado** $[a, b]$: Incluye los extremos; se dibuja con círculo relleno (●) en la recta numérica.
- **Intervalos semiabiertos:** $[a, b)$ incluye a pero excluye b; $(a, b]$ excluye a pero incluye b.
- **Notación con infinito:** Los extremos $\pm\infty$ siempre usan paréntesis abierto: $(-\infty, +\infty)$.

4 Resolución de una Inecuación Lineal

Paso a paso resuelto para despejar la incógnita y obtener el conjunto solución de una inecuación de primer grado.

1. **Enunciado:** Resolver la inecuación lineal $-3x + 5 \leq 17$
2. **Paso 1 (Restar 5 a ambos lados):** $-3x \leq 17 - 5 \Rightarrow -3x \leq 12$
3. **Paso 2 (Dividir entre −3 e invertir signo):** $x \geq 12 / (-3) \Rightarrow x \geq -4$
4. **Conjunto solución en intervalo:** $[-4, +\infty)$
5. **Representación gráfica:** Círculo relleno (●) sobre el -4 en la recta real y sombreado hacia la derecha.



ERROR FRECUENTE

¡Alerta Crítica! Al multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad por un número **NEGATIVO**, el sentido **de la desigualdad SIEMPRE se invierte:** si $-2x < 6$, **al dividir** entre -2 resulta $x > -3$. Olvidar girar el signo invierte por completo el conjunto solución.

Sistemas de Inecuaciones y Valor Absoluto

1 Fundamentos y Representación Gráfica

Un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita busca los valores numéricos que satisfacen todas las desigualdades de forma simultánea. La solución corresponde exactamente a la intersección geométrica de los intervalos solución individuales sobre la recta numérica.

- Inecuación individual: se resuelve despejando x y recordando invertir el signo de orden si se multiplica o divide por un valor negativo.
- Notación de intervalos: corchetes [ ] y puntos rellenos para desigualdades no estrictas ($\leq$, $\geq$); paréntesis ( ) y puntos huecos para desigualdades estrictas ($<$, $>$).
- Intersección gráfica ($\cap$): zona donde se superponen las líneas sombreadas de cada inecuación del sistema.



Regla de Inversión del Sentido

Al multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, el sentido de la desigualdad siempre se invierte (por ejemplo, $-2x < 6$ se convierte en $x > -3$).

2 Ecuaciones e Inecuaciones con Valor Absoluto

El valor absoluto $|x|$ mide la distancia desde el origen (cero) hasta la posición de x sobre la recta numérica real. Dado que una distancia nunca es negativa, su resolución algebraica se divide en casos según el signo de la constante a (para $a > 0$).

- **Ecuación básica:** $|x| = a$ equivale estrictamente a $x = a$ ó $x = -a$.
- **Inecuación 'menor que':** $|x| < a$ describe distancias menores a 'a', equivalente a la doble inecuación $-a < x < a$ (intervalo acotado abierto $(-a, a)$).
- **Inecuación 'mayor que':** $|x| > a$ describe distancias superiores a 'a', equivalente a $x > a$ ó $x < -a$ (unión de dos semirrectas disjuntas $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$).

Fórmulas clave

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ó } x < -a$$



Sistemas de Inecuaciones y Valor Absoluto

3 Ejemplo Resuelto Paso a Paso

Procedimiento paso a paso para hallar el conjunto solución de un sistema y de una inecuación con valor absoluto mediante operaciones algebraicas y comprobación de intervalos.

1 Paso 1: Resolver Sistema Lineal

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 3 \\ x + 4 < 9 \end{cases}$$

Despejando: $2x \geq 4 \rightarrow x \geq 2$ (intervalo $[2, \infty)$).
Para la segunda: $x < 5$ (intervalo $(-\infty, 5)$).

2 Paso 2: Intersección Gráfica

Se trazan ambas soluciones en la recta real.
La franja común de traslape es el intervalo semiabierto $[2, 5)$.
Por tanto, $S = [2, 5)$.



3 Paso 3: Resolver Inecuación con Valor Absoluto

Dada la expresión $|2x - 3| \leq 5$. Como $5 > 0$, se aplica $-5 \leq 2x - 3 \leq 5$. Sumando 3 en todos los miembros: $-2 \leq 2x \leq 8$. Dividiendo entre 2: $-1 \leq x \leq 4$.
Conjunto solución: $[-1, 4]$.

4 ERROR FRECUENTE

Término Independiente Negativo

Aplicar de forma mecánica las propiedades de distancia con valores negativos en el término independiente conduce a contradicciones matemáticas directas.

- **Caso Imposible:** $|x| < -3$ no tiene solución ($S = \emptyset$) porque una distancia jamás puede ser estrictamente menor que un número negativo.
- **Caso Universal:** $|x| > -3$ se cumple para todo número real ($S = \mathbb{R}$) porque el valor absoluto es por definición mayor o igual a 0, y 0 es siempre mayor que -3.
- **Regla de oro:** Antes de desglosar en ramas algebraicas, verifica siempre si el término independiente a es positivo, nulo o negativo.

ERROR FRECUENTE

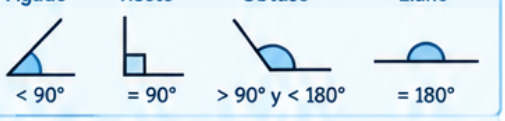
No desgloses $|x| < -a$ como $-(-a) < x < -a$. Si la constante de comparación es negativa, el valor absoluto no puede ser menor que ella; la solución es vacía de inmediato.

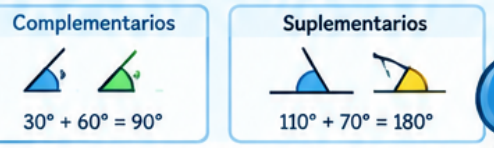
Mapa Mental: Ángulos y Triángulos

1 Clasificación de Ángulos por Apertura y Posición

Los ángulos se miden según su amplitud en grados sexagesimales y se relacionan según su disposición en el plano:

- **Por apertura:** Agudo (< 90°), Recto (= 90°, indicado con un cuadrado), Obtuso (> 90° y < 180°), Llano (= 180°).
- **Por posición:** Consecutivos (comparten vértice y un lado común), Adyacentes (consecutivos sobre una misma recta, suman 180°), Opuestos por el vértice (lados en prolongación mutua; miden exactamente lo mismo).
- **Por suma:** Complementarios (dos ángulos cuya suma es 90°), Suplementarios (dos ángulos cuya suma es 180°).

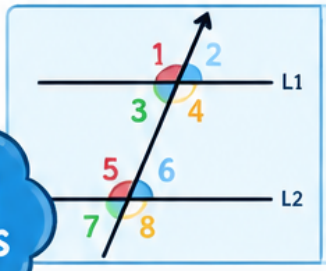




2 Rectas Paralelas Cortadas por una Secante

Cuando dos rectas paralelas (L1 || L2) son intersecadas por una transversal o secante, se forman ocho ángulos organizados en pares fundamentales:

- **Ángulos correspondientes:** Ocupan la misma posición relativa en cada intersección y son de igual medida (congruentes).
- **Ángulos alternos internos:** Situados entre las paralelas a lados opuestos de la secante; son congruentes entre sí.
- **Ángulos alternos externos:** Situados en el exterior de las paralelas a lados opuestos de la secante; son congruentes entre sí.
- **Ángulos conjugados (internos o externos):** Están del mismo lado de la secante y son suplementarios (su suma es 180°).



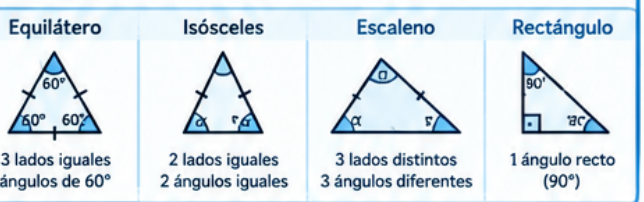
Correspondientes:
1 = 5, 2 = 6, 3 = 7, 4 = 8
Alternos internos:
3 = 6, 4 = 5
Alternos externos:
1 = 8, 2 = 7
Conjugados:
1 + 5 = 180°, 2 + 6 = 180°

Ángulos y Triángulos

3 Clasificación de Triángulos

Un triángulo es un polígono cerrado de tres lados delimitado por tres vértices. Se clasifica de forma independiente según sus lados y según sus ángulos:

- **Según la longitud de sus lados:**
  Equilátero (3 lados iguales, cada ángulo interno mide 60°).
  Isósceles (2 lados iguales y 2 ángulos opuestos congruentes).
  Escaleno (3 lados distintos y 3 ángulos diferentes).
- **Según la medida de sus ángulos:**
  Acutángulo (sus 3 ángulos interiores son agudos, < 90°).
  Rectángulo (posee exactamente 1 ángulo recto de 90°; sus lados forman catetos e hipotenusa).
  Obtusángulo (posee 1 ángulo obtuso, > 90°).



4 Teoremas Fundamentales de los Triángulos

Propiedades métricas de cumplimiento obligatorio en cualquier triángulo plano euclidiano:

- **Suma de ángulos internos:**
  $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
- **Suma de ángulos externos:**
  La suma de los tres ángulos exteriores (uno por cada vértice) es igual a 360°.
- **Ángulo exterior:**
  La medida de cualquier ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.
- **Desigualdad triangular:**
  La longitud de cualquier lado es estrictamente menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia absoluta.

Ejemplo Resuelto: Cálculo de Ángulo Desconocido

Problema: En un triángulo ABC, el ángulo interior en A mide $2x + 10°$, el ángulo en B mide $3x - 5°$, y el ángulo en C mide 45°. Determina el valor de la incógnita x y la medida exacta de los tres ángulos internos.

1. **Paso 1 (Planteamiento):**
   $(2x + 10°) + (3x - 5°) + 45° = 180°$.
2. **Paso 2 (Agrupación algebraica):**
   $5x + 50° = 180°$.
3. **Paso 3 (Despeje):**
   $5x = 180° - 50° = 130° \rightarrow x = \frac{130°}{5} = 26°$.
4. **Paso 4 (Comprobación de ángulos):**
   Ángulo A = $2(26°) + 10° = 62°$;
   Ángulo B = $3(26°) - 5° = 73°$; Ángulo C = 45°.
   Suma final: $62° + 73° + 45° = 180°$.

¡ERROR FRECUENTE!

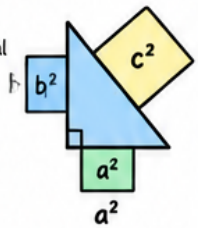
Nunca asumas que dos ángulos son complementarios (suman 90°) o que un triángulo es rectángulo solo por su apariencia visual.

La condición de perpendicularidad exige ver explícitamente el símbolo de ángulo recto (cuadrado en el vértice) o una declaración numérica expresa de 90°.

Mapa Mental: Teorema de Pitágoras y Aplicaciones

1 Definición y Regla Fundamental

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es exactamente igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de bos catetos.

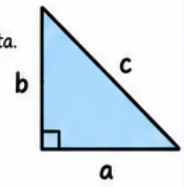


$$a^2 + b^2 = c^2$$

- **Fórmula fundamental:** $a^2 + b^2 = c^2$
- **Condición obligatoria:** exclusivamente válido en triángulos con un ángulo recto exacto de 90°
- **Identificación:** el ángulo de 90° señala directamente hacia el lado opuesto, que es siempre la hipotenusa.

2 Identificación de Elementos y Despejes

Reconocer las partes del triángulo rectángulo permite despejar cualquier incógnita con precisión algebraica directa.



- **Catetos (a, b):** lados perpendiculares que forman y delimitan el ángulo recto de 90°
- **Hipotenusa (c):** lado opuesto al ángulo recto y el segmento de mayor longitud del triángulo
- **Despeje de hipotenusa:** $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **Despeje de un cateto:** $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ o $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

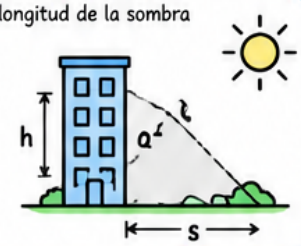
TEOREMA DE PITÁGORAS

3 Ternas Pitagóricas Clave y Usos Prácticos

Conjuntos de tres números enteros que satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$, esenciales para resolver cálculos rápidos y aplicaciones reales de distancias, sombras y diagonales.

- **Terna básica 3-4-5:** $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ (y sus múltiplos: 6-8-10, 9-12-15)
- **Terna secundaria 5-12-13:** $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$
- **Cálculo de diagonales:** división de rectángulos y cuadrados en dos triángulos rectángulos congruentes
- **Alturas y sombras:** determinación de alturas inaccesibles mediante la longitud de la sombra proyectada.

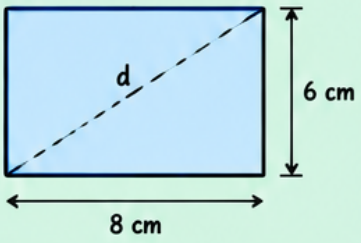
3-4-5 | 5-12-13



4 Ejemplo Resuelto: Diagonal de un Rectángulo

Cálculo paso a paso de la diagonal (d) de una pantalla o rectángulo con base de 8 cm y altura de 6 cm.

- **Paso 1 (Identificar catetos e hipotenusa):** base a = 8 cm, altura b = 6 cm, diagonal hipotenusa = c
- **Paso 2 (Plantear ecuación pitagórica):** $c^2 = 8^2 + 6^2$
- **Paso 3 (Calcular cuadrados y sumar):** $c^2 = 64 + 36 = 100$
- **Paso 4 (Extraer raíz cuadrada):** $c = \sqrt{100} = 10$ cm



5 ¡ERROR FRECUENTE!

Equívocos comunes que invalidan la aplicación del teorema en evaluaciones y problemas prácticos.

- **Sumar antes de elevar:** calcular $(a + b)^2$ en lugar de $a^2 + b^2$. Ejemplo erróneo: $3 + 4 = 7$, $7^2 = 49$ (incorrecto; el valor exacto es $3^2 + 4^2 = 25$)
- **Aplicar en triángulos no rectángulos:** usar la fórmula en triángulos acutángulos u obtusángulos sin que exista un ángulo de 90°
- **Restar en el orden equivocado al despejar catetos:** calcular $b^2 - c^2$ en vez de $c^2 - b^2$, produciendo raíces cuadradas de números negativos.

ERROR FRECUENTE!

¡Nunca sumes los catetos antes de elevarlos!

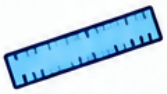
$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$$

Asimismo, verifica siempre que el triángulo contenga un ángulo de 90° antes de usar el teorema.

Mapa Mental 43: Perímetros y Áreas de Figuras Planas

1 Fundamentos: Contorno vs Superficie

El perímetro mide la longitud continua del borde exterior de una figura geométrica bidimensional, expresándose en unidades lineales. El área cuantifica la extensión de superficie encerrada dentro de dicho contorno y se expresa en unidades cuadradas.



Perímetro
(unidades lineales)
cm, m, km



Área
(unidades cuadradas)
cm^2, m^2, km^2

- **Perímetro (P):** suma de las longitudes de todos los lados exteriores (cm, m, km).
- **Área (A):** cantidad de unidades de superficie necesarias para cubrir el interior (cm^2, m^2, km^2).
- Conversión de unidades de superficie:
  $1\ m^2 = 10\,000\ cm^2$
  (factor de conversión: $100 \times 100 = 10^4$).

2 Formulario Esquemático de Polígonos Planos

Fórmulas paramétricas esenciales para calcular el contorno y la superficie de las figuras geométricas fundamentales.

Cuadrado:
$P = 4 \cdot l \quad | \quad A = l^2$

Rectángulo:
$P = 2 \cdot b + 2 \cdot h \quad | \quad A = b \cdot h$

Paralelogramo / Romboide:
$P = 2 \cdot a + 2 \cdot b \quad | \quad A = b \cdot h$
(donde h es la altura perpendicular a la base b)

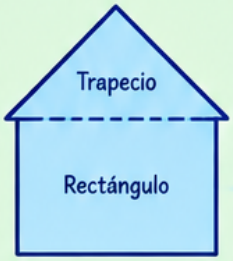
Rombo:
$P = 4 \cdot l \quad | \quad A = (D \cdot d)/2$
(D = diagonal mayor, d = diagonal menor)

Trapecio:
$P = B + b + l_2 + l_2 \quad | \quad A = (B + b) \cdot h)/2$
(B = base mayor, b = base menor, h = altura perpendiculara)

Triángulo:
$P = a + b + c \quad | \quad A = (b \cdot h)/2$
(b = base, h = altura perpendicular a dicha base)

3 Estrategia para Figuras Compuestas

Para calcular el perímetro y el área de figuras geométricas irregulares o combinadas, se aplica el principio de descomposición y aditividad.



Área total: Suma de áreas de las partes.

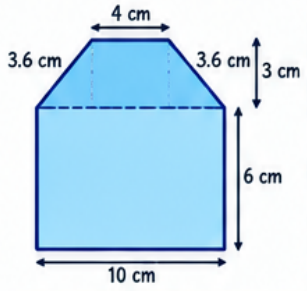
Perímetro total: Solo el borde exterior.

- **Área total:** se divide la figura en polígonos elementales conocidos y se suman sus áreas parciales (o se resta el hueco interior si existe).
- **Perímetro total:** se suman excluisvamente los segmentos que forman la frontera exterior real, ignorando las líneas divisorias internas creadas durante la descomposición.

Perímetros y Áreas Planas

4 Problema Resuelto: Área Sombreada de Figura Combinada

Se desea calcular el área sombreada y el perímetro exterior de una pieza compuesta por un rectángulo central unido a un trapecio en uno de sus extremos.



1 Paso 1: Identificar datos y subdividir la figura
La figura consta de un rectángulo de base 10 cm y altura 6 cm, coronado por un trapecio con base mayor B = 10 cm, base menor b = 4 cm, altura h = 3 cm y lados oblicuos de 3.6 cm cada uno.

2 Paso 2: Calcular el área del rectángulo
$A_{rectángulo} = b \cdot h = 10\ cm \cdot 6\ cm = 60\ cm^2$.

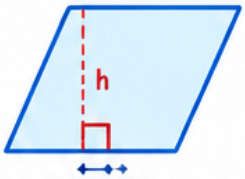
3 Paso 3: Calcular el área del trapecio
$A_{trapecio} = ((B + b) \cdot h)/2 = ((10 + 4) \cdot 3)/2$
$= (14 \cdot 3)/2 = 42/2 = 21\ cm^2$.

4 Paso 4: Calcular el área total y el perímetro exterior
Área total = $60\ cm^2 + 21\ cm^2 = 81\ cm^2$.
Perímetro exterior = base inferior (10 cm) + dos alturas rectangulares (6 cm + 6 cm) + dos lados oblicuos (3.6 cm + 3.6 cm) + base menor superior (4 cm) = 33.2 cm (no se suma la línea divisoria común de 10 cm).

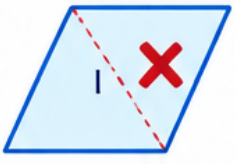
5 ¡ERROR FRECUENTE!

En romboides, triángulos y trapecios, ¡NUNCA confundas la altura (h) con la longitud del lado oblicuo (l)!

La altura siempre es un segmento perpendicular (a 90°) trazado entre la base y el vértice o base opuesta. Multiplicar la base por el lado inclinado en lugar de por la altura perpendicular distorsiona por completo el cálculo del área.



(altura real)



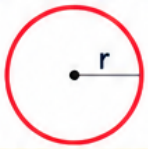
¡No es la altura!

Mapa Mental: Círculo y Circunferencia

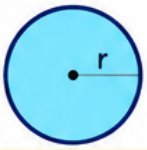
1 Círculo vs. Circunferencia

Diferencia fundamental entre el borde geométrico y la superficie encerrada.

- **Circunferencia:** Línea curva cerrada y plana cuyos puntos equidistan de un centro común. Representa el perímetro del círculo.
- **Círculo:** Región o superficie interior delimitada por la circunferencia. Representa el área.



Circunferencia (perímetro, L)

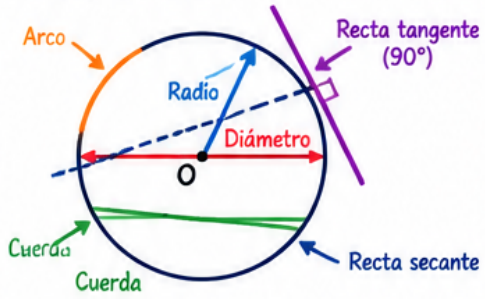


Círculo (superficie, A)

2 Elementos Lineales y Rectas Notables

Segmentos y rectas clave asociados al círculo y a la circunferencia.

- **Radio (r):** Segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.
- **Diámetro (d):** Segmento que une dos puntos pasando por el centro (d = 2r).
- **Cuerda:** Segmento que une dos puntos de la circunferencia sin pasar necesariamente por el centro.
- **Arco:** Porción continua de la circunferencia comprendida entre dos puntos.
- **Recta Tangente:** Recta que toca la circunferencia en exactamente un punto y es perpendicular al radio en dicho punto.
- **Recta Secante:** Recta que corta la circunferencia en dos puntos distintos.

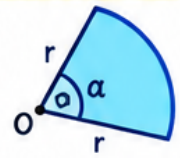


3 Fórmulas Principales: Longitud y Área

Relaciones fundamentales gobernadas por la constante pi ($\pi \approx 3{,}1416$).

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \text{o} \quad L = \pi \cdot d$$
$$A = \pi \cdot r^2$$

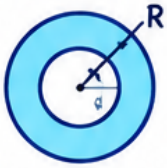
Sector Circular



$$\text{Área} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360°}$$

donde α es el ángulo central en grados.

Corona Circular



$$\text{Área} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$
$$(R > r)$$

CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA: Longitud y Superficie

4 Ejercicio Práctico Resuelto: Pista de Atletismo Circular

Cálculo completo de longitud y área para una pista circular con radio fraccionario $r = \frac{7}{2}$ metros (3,5 m). Usamos $\pi \approx \frac{22}{7}$ para exactitud pedagógica.

1 Identificar el radio

$r = \frac{7}{2}$ m = 3,5 m. Por definición, el diámetro es $d = 2 \cdot (\frac{7}{2}) = 7$ m.

2 Calcular la longitud de la pista (L)

$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot (\frac{22}{7}) \cdot (\frac{7}{2}) = 22$ m.

La distancia total alrededor del borde es exactamente 22 metros.

3 Calcular la superficie del terreno (A)

$A = \pi \cdot r^2 = (\frac{22}{7}) \cdot (\frac{7}{2})^2 = (\frac{22}{7}) \cdot (\frac{49}{4}) =$

$(22 \cdot 7) / 4 = \frac{154}{4} / 4 = 38{,}5$ m².

5 ¡ERROR FRECUENTE!

No eleves al cuadrado el diámetro

¡ALERTA!: Nunca eleves al cuadrado el diámetro en la fórmula del área. Si d = 10 m, el radio es r = 5 m y el área es $\pi \cdot (5)^2 = 25\pi$ m², NUNCA $\pi \cdot (10)^2 = 100\pi$ m² (lo que daría 4 veces el área real).

No confundas 2πr con πr²

Asimismo, no confundas la longitud del borde perimetral ($2\pi r$) con el área de la superficie (πr^2).

¡Recuerda!

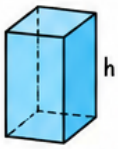
Cuerpos Geométricos: Área Superficial y Volumen

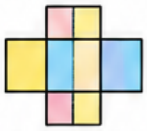
1 Poliedros: Prismas y Pirámides

Figuras tridimensionales delimitadas exclusivamente por polígonos planos.

Prisma Recto:

- Área lateral = Perímetro base · h
- Área total = $A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$
- Volumen = $A_{base} \cdot h$

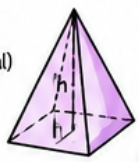


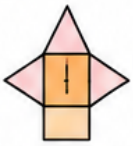


Desarrollo plano de un prisma

Pirámide:

- Área lateral = $\frac{(\text{Perímetro base} \cdot \text{apotema lateral})}{2}$
- Área total = $A_{lateral} + A_{base}$
- Volumen = $\frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$



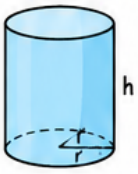


Desarrollo plano de una pirámide

2 Cuerpos Redondos: Cilindro, Cono y Esfera

Sólidos geométricos delimitados por al menos una superficie curva de revolución.

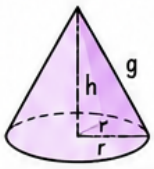
Cilindro



Área total = $2\pi r(h + r)$

Volumen = $\pi r^2 \cdot h$

Cono

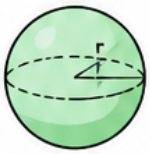


Generatriz $g = \sqrt{r^2 + h^2}$

Área total = $\pi r \cdot g + \pi r^2$

Volumen = $\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

Esfera



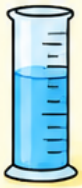
Área de la superficie = $4\pi r^2$

Volumen = $\frac{4}{3} \pi r^3$

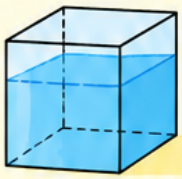
3 Equivalencias de Capacidad

Relaciones fundamentales entre medidas de volumen métrico y capacidad de líquidos.

- 1 dm^3 = 1 Litro (L)
- 1 m^3 = 1 000 Litros (L) = 1 Kilolitro (kL)
- 1 cm^3 = 1 Mililitro (mL)
- 1 000 cm^3 = 1 Litro (L)



1 dm^3 = 1 L

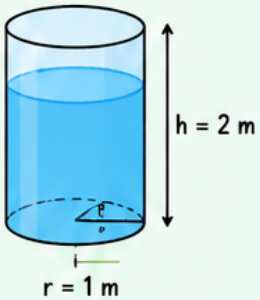


1 m^3 = 1 000 L

Cuerpos Geométricos: Área y Volumen

4 Ejemplo Resuelto: Depósito Cilíndrico

Cálculo del volumen y capacidad de almacenamiento en litros de un depósito cilíndrico de radio r = 1 m y altura h = 2 m.



Paso 1: Área de la base circular
$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1\ m)^2$
$\approx 3{,}1416\ m^2$.

Paso 2: Volumen del cilindro
$V = A_b \cdot h = 3{,}1416\ m^2 \cdot 2\ m$
$\approx 6{,}2832\ m^3$.

Paso 3: Conversión a capacidad
$6{,}2832\ m^3 \cdot 1\,000\ L/m^3$
$\approx$ 6 283,2 Litros.

5 Error Frecuente en Geometría Espacial

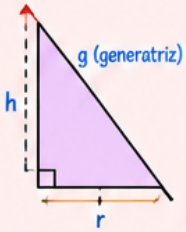
Confusiones habituales al aplicar fórmulas de área y volumen en cuerpos tridimensionales.

- Olvidar el factor (1/3) en conos y pirámides: su volumen no es igual al del prisma o cilindro envolvente, sino exactamente su tercera parte.
- Confundir la altura perpendicular del cuerpo (h) con la apotema lateral (Ap) o la generatriz (g): en pirámides y conos, h se usa para el volumen y Ap/g para el área lateral.

¡Cuidado con la altura y la apotema!

La altura (h) es la distancia perpendicular del vértice a la base y se usa para el volumen:
$V = \frac{1}{3} Ab \cdot h$.

La apotema lateral o generatriz va sobre la cara inclinada y se usa para el área lateral:
$A_{ll} = \pi rg$ o $A_{ll} = \frac{Pb}{P} \cdot A\frac{h}{P}/2$.

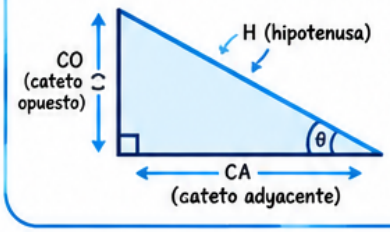


Trigonometría Básica del Triángulo Rectángulo

1 Conceptos Fundamentales y Lados de Referencia

La trigonometría en triángulos rectángulos (con un ángulo recto de 90°) estudia la relación matemática exacta entre las longitudes de sus lados y sus ángulos agudos.

- **Hipotenusa (H):** Es siempre el lado más largo del triángulo y se ubica directamente opuesto al ángulo recto de 90°.
- **Cateto Opuesto (CO):** Lado ubicado justo al frente del ángulo agudo de referencia analizado (θ).
- **Cateto Adyacente (CA):** Lado que forma parte del ángulo agudo analizado (θ), junto con la hipotenusa.
- **Teorema de Pitágoras asociado:** $H^2 = CO^2 + CA^2$.



2 Nemotecnia SOH-CAH-TOA y Razones Principales

Regla mnemotécnica estándar para recordar las tres razones trigonométricas directas en función del ángulo θ:

SOH → Seno (sen θ) = Cateto Opuesto / Hipotenusa (CO / H)

CAH → Coseno (cos θ) = Cateto Adyacente / Hipotenusa (CA / H)

TOA → Tangente (tan θ) = Cateto Opuesto / Cateto Adyacente (CO / CA)

3 Razones Trigonométricas Recíprocas

Son los inversos multiplicativos exactos de las razones trigonométricas principales para el mismo ángulo agudo θ:

Cosecante $(\csc\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} =$ Hipotenusa / Cateto Opuesto (H / CO)

Secante $(\sec\theta) = \frac{1}{\cos\theta} =$ Hipotenusa / Cateto Adyacente (H / CA)

Cotangente $(\cot\theta) = \frac{1}{\tan\theta} =$ Cateto Adyacente / Cateto Opuesto (CA / CO)

Trigonometría Básica

4 Valores Notables (30°, 45°, 60°)

Valores exactos obtenidos de triángulos especiales (equilátero dividido y triángulo rectángulo isósceles):

- **Ángulo 30°:**
  $\operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2}$ | $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
  $\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- **Ángulo 45°:**
  $\operatorname{sen}(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
  $\tan(45°) = 1$
- **Ángulo 60°:**
  $\operatorname{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ |
  $\tan(60°) = \sqrt{3}$

Truco nemotécnico de raíces:
Para sen(0°, 30°, 45°, 60°, 90°) use $\frac{\sqrt{n}}{2}$ con n = 0, 1, 2, 3, 4.

5 Ángulos de Elevación y Depresión

Definición geométrica respecto a una línea visual horizontal imaginaria paralela al suelo:

- **Ángulo de Elevación:** Se mide hacia arriba desde la línea horizontal hasta el objeto observado.
- **Ángulo de Depresión:** Se mide hacia abajo desde la línea horizontal del observador hasta el objeto.
- **Propiedad geométrica:** El ángulo de depresión desde un punto A hacia B es exactamente igual al ángulo de elevación desde B hacia A (ángulos alternos internos entre paralelas).



6 Ejemplo Práctico Resuelto: Altura de un Edificio

Problema: Un observador se sitúa a 20 metros de la base de un edificio. Con un teodolito mide un ángulo de elevación de 30° hacia la cúspide. ¿Cuál es la altura del edificio?

Paso 1 (Identificar datos):
- Distancia horizontal = Cateto Adyacente (CA) = 20 m. Ángulo θ = 30°.
- Altura buscada = Cateto Opuesto (CO) = h.

Paso 2 (Elegir razón trigonométrica):
- La razón que relaciona CO y CA es la Tangente: $\tan(30°) = \frac{CO}{CA}$.

Paso 3 (Plantear ecuación):
$\tan(30°) = \frac{h}{20}$.

Paso 4 (Despejar y calcular):
$h = 20 \cdot \tan(30°) = 20 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{3}) \approx 20 \cdot 0.577 = 11.55$ metros.

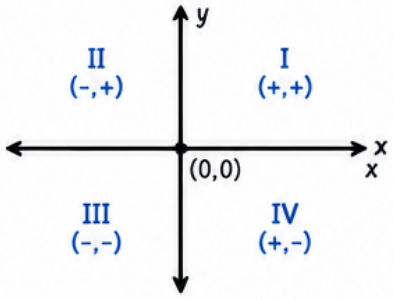
¡ERROR FRECUENTE!
¡Cuidado al cambiar el ángulo de referencia! Los catetos NO son fijos: el Cateto Opuesto para el ángulo α se convierte en Cateto Adyacente para el otro ángulo agudo β. La Hipotenusa es la única fija (opuesta a 90°). Verifica siempre cuál es tu ángulo de referencia antes de aplicar SOH-CAH-TOA.

Mapa Mental: Plano Cartesiano y la Línea Recta

1 Ejes Coordenados y Cuadrantes

El plano cartesiano se forma por dos rectas numéricas perpendiculares que se intersecan en el origen (0, 0). Cada punto P se ubica mediante el par ordenado (x, y).

- **Eje X (horizontal):** Abscisas. Valores positivos a la derecha y negativos a ba izquierda.
- **Eje Y (vertical):** Ordenadas. Valores positivos hacia arriba y negativos hacia abajo.
- **Cuadrante I** (+,+): $x > 0$, $y > 0$
- **Cuadrante II** (−,+): $x < 0$, $y > 0$
- **Cuadrante III** (−,−): $x < 0$, $y < 0$
- **Cuadrante IV** (+,−): $x > 0$, $y < 0$



2 Distancia y Punto Medio

Propiedades fundamentales para medir y dividir segmentos entre dos puntos cualesquiera $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano.

- **Distancia euclidiana:**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

derivada del Teorema de Pitágoras.

- **Coordenadas del Punto Medio:**

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

corresponde al promedio de abscisas y ordenadas.

3 Pendiente de la Recta (m)

La pendiente mide la inclinación y razón de cambio vertical respecto al avance horizontal.

- **Fórmula general:**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

donde $x_2 \neq x_1$.

- **Pendiente positiva** ($m > 0$): la recta es creciente (sube hacia la derecha).
- **Pendiente negativa** ($m < 0$): la recta es decreciente (baja hacia la derecha).
- **Pendiente cero** ($m = 0$): recta completamente horizontal.
- **Pendiente indefinida** ($x_2 - x_1 = 0$): recta completamente vertical.

ERROR FRECUENTE

¡Cuidado al calcular la pendiente! Nunca inviertas las variables colocando x en el numerador. La fórmula siempre mide el cambio vertical sobre el horizontal:

$$"m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}, \text{ jamás } \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}."$$

Además, mantén el mismo orden de los puntos en numerador y denominador.

Plano Cartesiano y la Recta

4 Formas de la Ecuación de la Recta

Modelos algebraicos equivalentes para representar una línea recta en el plano.

- **Punto-Pendiente:** $y - y_1 = m(x - x_1)$, útil conociendo un punto y la inclinación.
- **Pendiente-Intercepto:** $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el corte con el eje Y $(0, b)$.
- **Forma General:** $Ax + By + C = 0$, con A, B y C coeficientes enteros y $A \geq 0$.



5 Ejercicio Resuelto: Recta que Pasa por Dos Puntos

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1, 2) y B(4, 8).

1 Paso 1: Calcular la pendiente (m)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 2}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2.$$

2 Paso 2: Aplicar la forma punto-pendiente

Usando el punto A(1, 2) y $m = 2$:

$$y - 2 = 2(x - 1).$$

3 Paso 3: Obtener la forma pendiente-intercepto

Despejamos y: $y - 2 = 2x - 2 \rightarrow$

$$y = 2x + 0 \rightarrow y = 2x.$$

4 Paso 4: Expresar en forma general

Igualamos a cero: $2x - y = 0$

(donde $A = 2$, $B = -1$, $C = 0$).



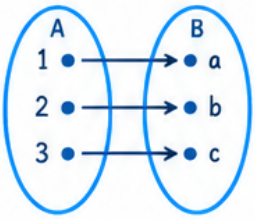
Mapa Mental 48: Concepto y Propiedades de Funciones

1 Definición: Relación vs. Función

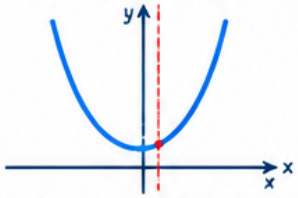
Una relación asocia elementos de un conjunto inicial con uno o varios de un conjunto final. Una función es una correspondencia rigurosa en la que a cada elemento del dominio le corresponde un único valor en el codominio.

- **Correspondencia unívoca:** cada valor x tiene a lo sumo una imagen y = f(x).
- **Criterio de la recta vertical:** si cualquier recta vertical corta la gráfica más de una vez, la gráfica no representa una función.

Relación (unívoca)



Criterio de la recta vertical



La recta vertical corta solo en un punto.

2 Componentes Fundamentales: Dominio, Codominio y Rango

Toda función queda unívocamente determinada por sus conjuntos estructurales y su regla de asignación:

- **Dominio (Dom f):** conjunto de partida que agrupa todas las variables independientes x admisibles.
- **Codominio:** conjunto de llegada previsto que contiene los valores potenciales de salida.
- **Rango o Recorrido (Ran f):** subconjunto del codominio constituido exclusivamente por los valores reales alcanzados f(x).

FUNCIONES MATEMÁTICAS

3 Formas de Representación de una Función

Un mismo modelo funcional puede expresarse en cuatro registros complementarios:

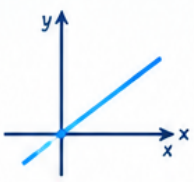
- **Verbal / Contextual:** descripción cualitativa del fenómeno o tarifa.
- **Algebraica:** ecuación explícita que calcula la salida, como f(x) = mx + b.
- **Tabular:** tabla de valores que relaciona pares ordenados (x, y).
- **Gráfica / Sagital:** curva o recta en el plano cartesiano y diagramas de Venn con flechas orientadas.

$$f(x) = mx + b$$

Ecuación (algebraica)

x	y
0	2
1	4
2	6

Tabla (tabular)

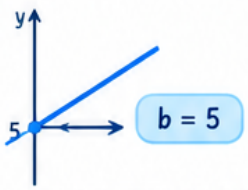


Gráfica / Sagital (cartesiana)

4 Modelado Aplicado: Función Lineal y Función Afín

Las funciones polinómicas de primer grado describen razones de cambio constantes en situaciones cotidianas:

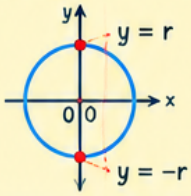
- **Función lineal directa:** f(x) = mx, pasa siempre por el origen (0, 0).
- **Función afín:** f(x) = mx + b, donde m es la pendiente (tasa de variación) y b es la ordenada en el origen (valor inicial).
- **Ejemplo práctico de tarifa telefónica:** Costo total C(x) = 5 + 0.50x, donde x representa los gigabytes consumidos, $5 es la cuota fija base y $0.50 es el costo variable por gigabyte.
- **Cálculo directo:** para x = 10 GB, el costo resulta C(10) = 5 + 0.50(10) = 5 + 5 = $10.00.



La recta pasa por la ordenada en el origen (0, 5).

ERROR FRECUENTE

Asignar múltiples salidas a una misma entrada en una relación y tratarla como función. Por ejemplo, en una circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, para x = 0 existen dos salidas (y = r y y = −r), por lo que la ecuación completa no es una función sino una relación.



Mapa Mental: Estadística Descriptiva

Estadística Descriptiva

1 Recolección de Datos y Frecuencias



La estadística descriptiva organiza datos numéricos para comprender el comportamiento de un conjunto de observaciones.

- **Frecuencia Absoluta (f):** Número de veces que aparece un dato específico.
- **Frecuencia Relativa (fr):** Cociente entre la frecuencia absoluta y el total de datos ($fr = f / N$).
- **Frecuencia Acumulada (F):** Suma consecutiva de las frecuencias absolutas hasta un valor dado.

2 Medidas de Tendencia Central (Datos No Agrupados)



Valores representativos que resumen un conjunto completo de datos en un único punto focal.

- **Media Aritmética ($\bar{x}$):** Promedio obtenido sumando todos los valores y dividiendo entre el total N.
- **Mediana (Me):** Valor central que divide los datos ordenados en dos partes iguales (50% superior y 50% inferior).
- **Moda (Mo):** Valor o valores que ocurren con mayor frecuencia absoluta dentro dal conjunto.

3 Nociones Básicas de Dispersión



Miden qué tan concentrados o alejados se encuentran los datos con respecto a su valor central.

- **Rango (R):** Diferencia simple entre el valor máximo y el valor mínimo ($R = V_{máx} - V_{mín}$).
- **Desviación respecto a la media:** Distancia de cada valor individual al promedio general ($|x - \bar{x}|$).
- **Varianza y Desviación Estándar:** Promedio del cuadrado de las distancias respecto a da media, expresando la variabilidad global.

4 Representación e Interpretación Gráfica



Visualización estructurada para extraer patrones rápidos a partir de tablas de distribución.

- **Gráfico de Barras:** Comparación de categorías discretas mediante barras separadas de altura proporcional.
- **Histograma:** Barras contiguas continuas que muestran la distribución de intervalos numéricos continuos.
- **Diagrama de Sectores (Pastel):** Proporciones circulares donde 360° equivalen al 100% de la muestra.

5 Caso Resuelto: Calificaciones Escolares



Análisis estadístico completo de las calificaciones obtenidas por 9 estudiantes: 6, 8, 5, 8, 9, 8, 7, 10, 5.

1 Paso 1: Ordenar los datos de menor a mayor

Conjunto ordenado: 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 10.
Total de observaciones: N = 9.

2 Paso 2: Calcular la Media Aritmética ($\bar{x}$)

$\bar{x} = (5 + 5 + 6 + 7 + 8 + 8 + 8 + 9 + 10) / 9$
$= 66 / 9 = 7.33.$

3 Paso 3: Determinar la Mediana (Me)

Como N = 9 (impar), la posición central es $(9 + 1) / 2$ = posición 5. El quinto valor ordenado es Me = 8.

4 Paso 4: Identificar la Moda (Mo) y el Rango (R)

El valor que más veces se repite es 8 (frecuencia = 3), por lo que Mo = 8.
Rango: $R = 10 - 5 = 5$.

¡ERROR FRECUENTE!

¡Nunca tomes el valor que se ubica en el centro de la lista original sin antes haber ordenado los datos de menor a mayor!

En la serie desordenada 6, 8, 5, 8, [9], 8, 7, 10, 5 el centro parece ser 9, pero el valor correcto tras ordenar es 8.



Mapa Mental 50: Probabilidad Básica y Técnicas de Conteo

1 Fundamentos: Experimentos y Espacio Muestral



Un experimento aleatorio es aquel cuyo resultado no puede predecirse con certeza antes de realizarse. El conjunto de todos los resultados posibles se denomina **espacio muestral** (E o Ω).

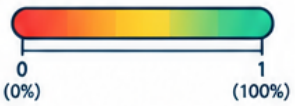
- **Experimento aleatorio:** lanzar un dado equilibrado de 6 caras (E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}).
- **Evento elemental:** subconjunto con un solo resultado (por ejemplo, obtener un 4).
- **Evento seguro:** siempre ocurre; P(E) = 1 (por ejemplo, obtener un número del 1 al 6).
- **Evento imposible:** nunca puede ocurrir; P(Ø) = 0 (por ejemplo, obtener un 8 en un dado común).
- **Eventos mutuamente excluyentes:** dos eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo (su intersección es vacía: A ∩ B = Ø).

2 Regla de Laplace y Escala de Probabilidad



Cuando todos los eventos elementales de un espacio muestral finito son equiprobables, la probabilidad clásica de un evento A se calcula con la **Regla de Laplace:**

$$P(A) = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Posibles Totales}}$$



- **Escala matemática:** $0 \leq P(A) \leq 1$ en números reales o fraccionarios.
- **Escala porcentual:** 0% (imposible) a 100% (certeza absoluta).
- **Ejemplo inmediato:** probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado de 6 caras.
  Casos favorables: {2, 4, 6} (3 casos).
  Casos posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6} (6 casos).
  $P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.50$ (50%).

Probabilidad Básica y Conteo

3 Principios Fundamentales de Conteo



Determinar el número total de casos sin necesidad de listar uno por uno:

Principio Aditivo (O)

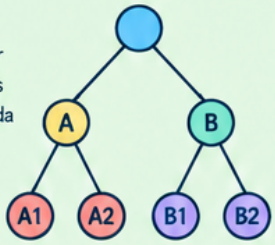
Si una actividad se realiza de 'm' maneras y otra alternativa incompatible de 'n' maneras, el total es **m + n** opciones.

Principio Multiplicativo (Y)

Si un proceso consta de dos etapas consecutivas, donde la primera tiene 'm' resultados y la segunda 'n' resultados, el total de arreglos es **m × n.**

Diagramas de árbol:

Representación gráfica ramificada para rastrear secuencias de eventos y calcular probabilidades compuestas multiplicando las ramas de izquierda a derecha.



4 Problema Aplicado Paso a Paso



Cálculo de probabilidad compuesta y combinada con dados y naipes:

1 Paso 1: Identificar el espacio muestral total

Al lanzar dos dados estándor de 6 caras de forma sucesiva, el total de pares ordenados posibles es 6 × 6 = 36 casos equiprobables.

2 Paso 2: Contar los casos favorables del evento

Queremos la probabilidad de que la suma de caras sea igual a 7. Los pares favorables son: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1). Total = 6 casos favorables.

3 Paso 3: Aplicar Laplace y simplificar la fracción

P(Suma 7) = 6 / 36 = 1 / 6 ≈ 0.1667, lo que equivale a un 16.67% de probabilidad.

¡ERROR FRECUENTE!

Sumar probabilidades de dos eventos que ocurren a la vez sin restar su intersección.
Regla general para eventos no excluyentes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si sumas directo, cuentas dos veces los elementos compartidos.